

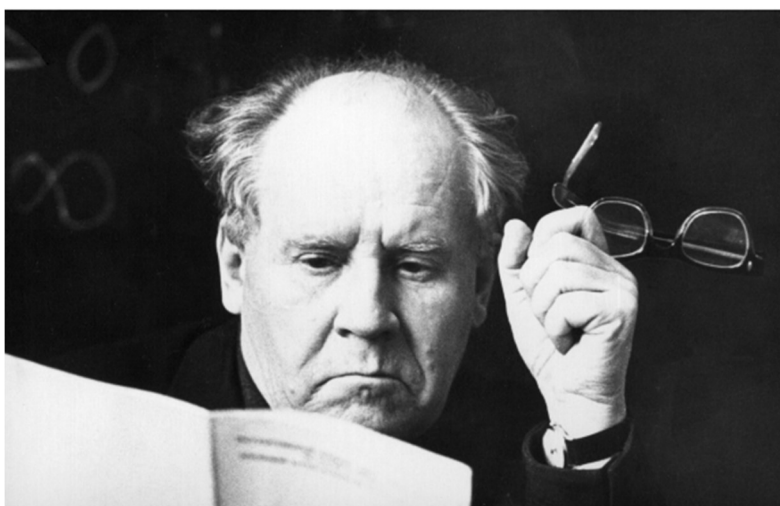
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

# ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2026

Материалы  
XXII Международной научной конференции  
по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2026»

Республика Беларусь, Гродно  
18–22 мая 2026 года

В двух частях  
Часть 2



Гродно  
ГрГУ им. Янки Купалы  
2026

УДК 517.9:001(045)  
ББК 22.161.6:73  
Е79

Рекомендовано Редакционно-издательским советом  
учреждения образования  
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Редакционная коллегия:

*А.К. Деменчук, Е.К. Макаров, В.М. Волков, А.А. Гринь,  
И.П. Мартынов, В.М. Пецевич, Л.В. Детченя, Е.Е. Кулеш,  
А.В. Кузьмич, Н.П. Макарова, Г.Ч. Шушкевич, В.Е. Хартовский*

Рецензенты:

*Деменчук А.К.*, доктор физико-математических наук, профессор,  
*Макаров Е.К.*, доктор физико-математических наук, профессор  
(Государственное научное учреждение  
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»);  
*Кузьмич А.В.*, кандидат физико-математических наук, доцент  
(учреждение образования  
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»)

Е79 **Еругинские** чтения – 2026 : материалы XXII Междунар. науч.  
конф. по дифференциальным уравнениям (Республика Беларусь,  
Гродно, 18–22 мая 2026 г.) : в 2 ч. Ч. 2 / Ин-т мат. Нац. акад. наук  
Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Гродн. гос. ун-т им. Янки Купалы ;  
редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Гродно : ГрГУ, 2026. – 167 с.

ISBN 978-985-582-732-1 (ч. 2)

ISBN 978-985-582-730-7

Сборник содержит доклады, представленные на XXII Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2026», которая состоялась в Гродненском государственном университете имени Янки Купалы 18–22 мая 2026 года. В докладах рассмотрены следующие направления: уравнения с частными производными, интегро-дифференциальные операторы и уравнения, дифференциальные уравнения и их приложения, методика преподавания математических дисциплин в высшей школе. Адресуется специалистам в области дифференциальных уравнений.

УДК 517.9:001(045)  
ББК 22.161.6:73

ISBN 978-985-582-732-1 (ч. 2)  
ISBN 978-985-582-730-7

© Учреждение образования  
«Гродненский государственный университет  
имени Янки Купалы», 2026

# УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

## ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ (ОМФ) В УРАВНЕНИИ БОРНА-ИНФЕЛЬДА (БИ)

И.Е. Андрушкевич

Уравнение Борна-Инфельда имеет вид [1]

$$\left(a - \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} - \left(b + \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $a, b$  – числовые параметры, определяемые физикой задачи. Оно используется в нелинейной электродинамике для моделирования соответствующих физических явлений. Количество известных его решений весьма ограничено [1]. По этой причине актуальность задачи нахождения аналитических решений уравнения (1) представляется несомненной.

В данной работе для построения решений уравнения (1) мы впервые воспользуемся ОМФ-3 [2].

Осуществив в (1)  $u(x, t) = 1/v(x, t)$ , для функции  $v(x, t)$  получаем уравнение с частными производными

$$2av^3v_x^2 - av^4v_{xx} + v_t^2v_{xx} - 2v_tv_xv_{xt} - 2bv^3v_t^2 + bv^4v_{tt} + v_x^2v_{tt} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$v(x, t) = 1 + \chi_1(x)\tau_1(t) + \chi_2(x)\tau_2(t), \quad (3)$$

где  $\chi_1(x), \tau_1(t), \chi_2(x), \tau_2(t)$  – неизвестные функции соответствующих переменных.

Подставляя (3) в (2), сводим последнее к билинейному функциональному уравнению

$$\sum_{i=1}^{75} \psi_i(x)\varphi_i(t) = 0. \quad (4)$$

Ввиду большого количества слагаемых в (4) приведем только первые 24:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tau_1^3, \psi_1 = 6a\chi_1(\chi_1')^2 - 6a\chi_1^2\chi_1''; \varphi_2 = \tau_2^3, \psi_2 = 6a\chi_2(\chi_2')^2 - 6a\chi_2^2\chi_2''; \\ \varphi_3 &= (\tau_1')^2\tau_1, \psi_3 = \chi_1^2\chi_1'' - 6b\chi_1^3 - 2\chi_1(\chi_1')^2; \varphi_4 = (\tau_2')^2\tau_2, \psi_4 = \chi_2^2\chi_2'' - 6b\chi_2^3 - 2\chi_2(\chi_2')^2; \\ \varphi_5 &= \tau_1^2\tau_1'', \psi_5 = 6b\chi_1^3 + \chi_1(\chi_1')^2; \varphi_6 = \tau_2^2\tau_2'', \psi_6 = 6b\chi_2^3 + \chi_2(\chi_2')^2; \\ \varphi_7 &= \tau_1^5, \psi_7 = 2a\chi_1^3(\chi_1')^2 - a\chi_1^4\chi_1''; \varphi_8 = \tau_2^5, \psi_8 = 2a\chi_2^3(\chi_2')^2 - a\chi_2^4\chi_2''; \\ \varphi_9 &= \tau_1^4, \psi_9 = 6a\chi_1^2(\chi_1')^2 - 4a\chi_1^3\chi_1''; \varphi_{10} = \tau_2^4, \psi_{10} = 6a\chi_2^2(\chi_2')^2 - 4a\chi_2^3\chi_2''; \end{aligned}$$

$$\varphi_{11} = (\tau_1')^2 \tau_2^2 + (\tau_2')^2 \tau_1^2, \psi_{11} = -6b\chi_1^2 \chi_2^2; \varphi_{12} = \tau_1 \tau_2'' + \tau_2 \tau_1'', \psi_{12} = 4b\chi_1 \chi_2;$$

$$\varphi_{13} = \tau_1^2, \psi_{13} = 2a(\chi_1')^2 - 4a\chi_1 \chi_1'; \varphi_{14} = \tau_2^2, \psi_{14} = 2a(\chi_2')^2 - 4a\chi_2 \chi_2';$$

$$\varphi_{15} = \tau_1^2 \tau_2, \psi_{15} = 6a \left( 2\chi_1 \chi_1' \chi_2' + \chi_2 (\chi_1')^2 - \chi_1^2 \chi_2'' - 2\chi_1 \chi_2 \chi_1'' \right);$$

$$\varphi_{16} = \tau_2^2 \tau_1, \psi_{16} = 6a \left( 2\chi_2 \chi_2' \chi_1' + \chi_1 (\chi_2')^2 - \chi_2^2 \chi_1'' - 2\chi_1 \chi_2 \chi_2'' \right);$$

$$\varphi_{17} = \tau_1^3 \tau_1'', \psi_{17} = 4b\chi_1^4; \varphi_{18} = \tau_2^3 \tau_2'', \psi_{18} = 4b\chi_2^4;$$

$$\varphi_{19} = \tau_1^4 \tau_1'', \psi_{19} = b\chi_1^5; \varphi_{20} = \tau_2^4 \tau_2'', \psi_{20} = b\chi_2^5;$$

$$\varphi_{21} = \tau_1^2 \tau_2'', \psi_{21} = (\chi_1')^2 \chi_2 + 6b\chi_1^2 \chi_2; \varphi_{22} = \tau_2^2 \tau_1'', \psi_{22} = (\chi_2')^2 \chi_1 + 6b\chi_2^2 \chi_1;$$

$$\varphi_{23} = \tau_1'' \tau_2^3, \psi_{23} = 4b\chi_2^3 \chi_1; \varphi_{24} = \tau_2'' \tau_1^3, \psi_{24} = 4b\chi_1^3 \chi_2.$$

Применяя алгоритм реализации ОМФ [3], получаем, что функции

$$\chi_1(x) = c_1 \exp \left( c_5 \sqrt{\frac{b}{a}} x \right), \tau_1(t) = \exp(c_5 t);$$

$$\chi_2(x) = c_2 \exp \left( -c_5 \sqrt{\frac{b}{a}} x \right), \tau_2(t) = \exp(-c_5 t), c_1, c_2, c_5 = const,$$

являются одним из решений уравнения (4). Соответствующее точное аналитическое решение БИ – уравнения (1) будет иметь вид

$$u(x, t) = \left\{ 1 + c_1 \exp \left( c_5 \sqrt{\frac{b}{a}} x + c_5 t \right) + c_2 \exp \left( -c_5 \sqrt{\frac{b}{a}} x - c_5 t \right) \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Решение (5) БИ – уравнения (1) получено нами впервые и оно может быть использовано при исследовании явлений нелинейной электродинамики.

### Литература

1. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.
2. Андрушкевич И. Е. Методы разделения переменных в волновых уравнениях. Новополоцк: ПГУ, 2010. – 240 с.
3. Андрушкевич И. Е. Метод построения аналитических решений нелинейных уравнений с частными производными и алгоритм решения уравнений третьего порядка специального вида // Информатика. – 2017. – № 4. – С. 5–19.

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.Б. Бекиев

Краевые задачи для уравнений четвёртого порядка находят широкое применение при моделировании процессов в различных областях науки и техники: при изучении динамики сжимаемой стратифицированной жидкости, распространения волн в диспергирующих средах, вибраций кораблей, колебаний стержней, балок и пластин.

Классификация уравнений четвёртого порядка с двумя независимыми переменными дана в монографии [1]. Нелинейное биволновое уравнение четвертого порядка рассмотрено в работе [2]. Начально-граничные задачи для колебаний балки исследуются в работе [3].

В данной работе для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области рассмотрена граничная задача. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

В области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < q\}$$

рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{yyu} + u_y - u_{xxxx} - b^2 u = 0. \quad (1)$$

где  $b = \text{const}$ .

**Задача 1.** Найти в области  $\Omega$  функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C_{x,y}^{3,1}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y}^{4,3}(\Omega);$$

$$Lu(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x), \quad u(x, q) = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(1, y) = 0, \quad u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad u_{xx}(0, y) = 0,$$

$$u_{xxx}(0, y) = u_{xxx}(1, y), \quad 0 \leq y \leq q,$$

где  $\varphi(x), \psi(x), \eta(x)$  — заданные функции, причём

$$\varphi(1) = \eta(1) = \psi(1) = 0,$$

$$\varphi^{(2i+1)}(0) = \varphi^{(2i+1)}(1), \quad \eta^{(2i+1)}(0) = \eta^{(2i+1)}(1), \quad i = 0, 1,$$

$$\varphi''(0) = \eta''(0) = 0.$$

Обратная задача для уравнения (1) без слагаемого  $u_y$  рассмотрена в работе [4], а прямая задача при  $b = 0$  без слагаемого  $u_y$  изучена в работе [5].

**Теорема 1.** Пусть функции  $\varphi(x), \psi(x), \eta(x)$  удовлетворяют условиям:

$$\varphi, \eta \in C^5[0, 1], \quad \psi \in C^4[0, 1],$$

$$\varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi^{(4)}(1) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), \quad \varphi'''(0) = \varphi'''(1),$$

$$\eta(1) = \eta''(0) = \eta^{(4)}(1) = 0, \quad \eta'(0) = \eta'(1), \quad \eta'''(0) = \eta'''(1),$$

$$\psi(1) = \psi''(0) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1), \quad \psi'''(0) = \psi'''(1).$$

Тогда существует единственное решение задачи 1.

Введем следующие нормы:

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,1]} = \left( \int_0^1 |u(x, y)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{\bar{\Omega}} |u(x, y)|.$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи 1 справедливы оценки:

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,1]} \leq C_1 (\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|\eta\|_{L_2}),$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_2 (\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|\eta\|_{W_2^1}).$$

### Литература

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Т., 2000. – 144 с.
2. Корзюк В.И., Рудько Я.В. Классическое решение смешанной задачи с условиями Дирихле и Неймана для нелинейного биволнового уравнения // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – Том 235 (2024). – С. 40–56.
3. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 364–374.
4. Bekiev A.B. On the solvability of an inverse problem for a fourth-order equation. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – No. 3(119), 2025, pp. 75–84.
5. Apakov Yu.P., Meliquzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – No. 4(112), 2023, pp. 30–40.

## О ПОСТРОЕНИИ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВЕЩЕСТВЕННЫМ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛАМ

О.Н. Белько

Рассмотрим вещественную полиномиальную линейную однородную систему уравнений с частными производными первого порядка

$$\mathfrak{L}_j(x) y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \leq n$ , построенную посредством не являющихся линейно связанными на пространстве  $\mathbb{R}^m$  [1, с. 113–114] линейных дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathfrak{L}_j(x) = \sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \partial_{x_i} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

с полиномиальными координатными функциями  $u_{ji}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

При этом у полиномов  $u_{ji}$  степени таковы, что  $\max \{ \deg u_{ji} : i = 1, \dots, n \} = p_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , а  $\max \{ p_j : j = 1, \dots, m \} = p$ .

В работах [2, 3] получен критерий, когда по достаточному количеству комплекснозначных частных интегралов находится первый интеграл Дарбу системы уравнений с частными производными (1), заданной в комплекснозначном фазовом пространстве. Количество частных интегралов, достаточное для аналитического выражения первого интеграла Дарбу системы уравнений с частными производными первого порядка (1), равно  $l = \sum_{j=1}^m C_{n+p_j-1}^n + 1$  и зависит лишь от чисел  $n, m, p_1, \dots, p_m$ . Если учитывать свойства частных интегралов системы (1), то построение ее первых интегралов можно осуществить по гораздо меньшему числу частных интегралов. В данной работе выделены такие свойства вещественных полиномиальных частных интегралов, при выполнении которых первый интеграл Дарбу системы уравнений с частными производными (1) строится по меньшему количеству частных интегралов. Введем следующее понятие [4, с. 188]: для системы (1) полином

$$\omega: x \rightarrow \omega(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad E\omega \subset \mathbb{R}$$

является вещественным полиномиальным частным интегралом тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{L}_j \omega(x) = \omega(x) W_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

где  $W_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , суть полиномы.

Так, например, имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть система уравнений с частными производными первого порядка (1) имеет вещественные полиномиальные частные интегралы  $\omega_l: x \rightarrow \omega_l(x)$ ,  $l = 1, \dots, s$ , такие, что

$$\mathfrak{L}_j \omega_l(x) = \lambda_{jl} \omega_l(x) M_j(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_{jl} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, s, \quad (2)$$

где  $M_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  – полиномы, а  $\text{rank } \|\lambda_{jl}\|_{m \times s} < s$ . Тогда функция

$$F: x \rightarrow \prod_{l=1}^s \omega_l^{\gamma_l}(x) \quad \forall x \in G, \quad G \subset \mathbb{R}^n, \quad \gamma_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, s, \quad \sum_{l=1}^s |\gamma_l| \neq 0,$$

где вещественные числа  $\gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, s$ , находятся из системы  $\sum_{l=1}^s \lambda_{jl} \gamma_l = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,

при условии  $\sum_{l=1}^s |\gamma_l| \neq 0$ , является первым интегралом на области  $G$  системы с частными производными (1).

**Пример.** Рассмотрим линейную однородную систему уравнений с частными производными

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1(x) y &\equiv (2x_1x_2 + 4x_1) \partial_{x_1} y + (3x_1 - x_2x_4 - x_4) \partial_{x_2} y + (4x_3 + 2x_2x_3) \partial_{x_3} y + \\ &\quad + (3x_1x_2 - 4x_2 + x_2x_4 - 2x_2^2) \partial_{x_4} y = 0, \\ \mathfrak{L}_2(x) y &\equiv (2x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_4) \partial_{x_1} y + (x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_3) \partial_{x_2} y + \\ &\quad + (2x_1x_2 - x_1x_3 + x_4) \partial_{x_3} y + (3x_1^2 - x_1x_4 - 2x_3 + 2x_4) \partial_{x_4} y = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции  $\omega_1: x \rightarrow x_1 - 2x_3 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$  и  $\omega_2: x \rightarrow x_2 + x_3x_4 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$  являются вещественными полиномиальными частными интегралами системы (3) такими, что верны

тождества вида (2)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1\omega_1(x) &= 2\omega_1(x)M_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{L}_1\omega_2(x) = -\omega_2(x)M_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, \\ \mathfrak{L}_2\omega_1(x) &= -2\omega_1(x)M_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad \mathfrak{L}_2\omega_2(x) = \omega_2(x)M_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^4,\end{aligned}$$

где полиномы  $M_1: x \rightarrow x_2 + 2$  и  $M_2: x \rightarrow -x_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4$ , а  $\text{rank} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 < 2$ .

Из линейной однородной системы  $\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \\ -2\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \gamma_2 = 2\gamma_1$  находим, например, что  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$ . Тогда из теоремы получим, что функция

$$F: x \rightarrow (x_1 - 2x_3)(x_2 + x_3x_4 + 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4 \quad (4)$$

будет первым интегралом на пространстве  $\mathbb{R}^4$  системы уравнений с частными производными (3).

Так как скобки Пуассона  $[\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2]$  не являются линейной комбинацией операторов  $\mathfrak{L}_1$  и  $\mathfrak{L}_2$ , то дифференциальная система с частными производными (3) является неполной [4, с.40–43]. Поэтому ее интегральный базис состоит из не более, чем из одного первого интеграла. Значит, первый интеграл (4) образует базис первых интегралов системы уравнений с частными производными (3) на пространстве  $\mathbb{R}^4$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф25КИ-087 от 06.02.2025.

### Литература

1. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
2. Буслюк, Д. В. Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных / Д. В. Буслюк // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 418–419.
3. Буслюк, Д. В. Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: дис. . . . канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Д. В. Буслюк. – Гродно, 2000. – 95 с.
4. Горбузов, В. Н. Интегралы дифференциальных систем / В. Н. Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 447 с.

## ОДНО СООТНОШЕНИЕ ТИПА ГАУССА ДЛЯ ФУНКЦИИ ГОРНА $H_5$

И.Б. Гарипов, Р.М. Мавлявиев

В теории обобщенного волнового уравнения и осесимметрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэнтная функция Горна [1]

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m} \frac{x^m y^n}{m! n!}.$$

Отметим, что функция Горна  $H_3$  записывается через функцию Гаусса и для нее известны [2] соотношения, которые при  $y = 0$  как частный случай переходят в известные соотношения для функции Гаусса. В частности в работе [3] было доказано соотношение

$$\delta(\alpha - (\delta - \beta)x)H_3(\alpha, \beta; \delta; x, y) - \alpha\delta(1 - x)H_3(\alpha + 1, \beta; \delta; x, y) +$$

$$\begin{aligned}
& + (\delta - \alpha) (\delta - \beta) x H_3 (\alpha, \beta; \delta + 1; x, y) = \\
& = \frac{\delta y}{1 - \alpha} H_3 (\alpha - 1, \beta; \delta; x, y) - \frac{(\delta - \beta) xy}{1 - \alpha} H_3 (\alpha - 1, \beta; \delta + 1; x, y),
\end{aligned}$$

из которой при  $y = 0$  как частный случай следует формула

$$\delta(\alpha - (\delta - \beta)x)F(\alpha, \beta; \delta; x) - \alpha\delta(1 - x)F(\alpha + 1, \beta; \delta; x) + (\delta - \alpha)(\delta - \beta)x F(\alpha, \beta; \delta + 1; x) = 0.$$

В этой работе рассматривается функция Горна  $H_5$

$$H_5(\alpha; \gamma; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n}}{(\gamma)_m} \frac{y^n x^m}{n! m!},$$

которую можно записать через функцию Куммера

$$H_5(\alpha; \gamma; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 - \alpha)_n} \frac{y^n}{n!} {}_1F_1(\alpha - n; \gamma; x).$$

Доказана формула

$$\begin{aligned}
& \delta(\delta - 1)H_5(\alpha; \delta - 1; x, y) + \delta(1 - \delta - x)H_5(\alpha; \delta; x, y) + (\delta - \alpha)xH_5(\alpha; \delta + 1; x, y) = \\
& = -\frac{\delta y}{1 - \alpha}H_5(\alpha - 1; \delta; x, y) + \frac{(\delta - \alpha)xy}{1 - \alpha}H_5(\alpha - 1; \delta + 1; x, y),
\end{aligned}$$

из которой при  $y = 0$  как частный случай следует известная [4] формула

$$\delta(\delta - 1) {}_1F_1(\alpha; \delta - 1; x) + \delta(1 - \delta - x) {}_1F_1(\alpha; \delta; x) + (\delta - \alpha)x {}_1F_1(\alpha; \delta + 1; x) = 0.$$

#### Литература

1. Капилевич, М. Б. О конфлюэнтных функциях Горна / М. Б. Капилевич // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 9. – С. 1239–1254.
2. Мавлявиев, Р. М., Гарипов, И. Б. Некоторые соотношения между функциями Горна / Р. М. Мавлявиев, И. Б. Гарипов // Проблемы математического анализа. – 2020. – Вып. 104. – С. 57–62.
3. Мавлявиев, Р. М., Гарипов, И. Б. Гауссово соотношение № 4 для функций Горна  $H_3$  / Р. М. Мавлявиев, И. Б. Гарипов // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения 2018): материалы Междунар. науч. конф., Гродно, 15–18 мая 2018 г. – Ч. 2. – Мн. : Институт математики НАН Беларуси, 2018. – С. 8.
4. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения. – 2-е изд., перераб. и доп. / Н. Н. Лебедев. – М.-Л. : Физматгиз, 1963.

## О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПОРИСТОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОГЛОЩЕНИЕМ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.Л. Гладков

Рассматривается начально-краевая задача для нелинейного параболического уравнения

$$u_t = \Delta u^\mu - au^\nu, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

с нелинейным нелокальным граничным условием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = \int_{\Omega} k(x, y, t) u^l(y, t) dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\mu > 1$ , и  $a, \nu, l$  – положительные числа,  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$  при  $N \geq 1$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Предполагается, что неотрицательные функции  $k(x, y, t)$  и  $u_0(x)$  удовлетворяют следующим условиям

$$k(x, y, t) \in L_{loc}^{\infty}(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, \infty)), \quad u_0(x) \in L^{\infty}(\Omega).$$

Начально-краевые задачи для параболических уравнений с нелокальными граничными условиями рассматривались многими авторами (см., например, [1–11] и имеющуюся в них библиографию). Так, задача (1)–(3) с  $\mu = 1$  исследовалась в [12, 13].

Пусть  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ ,  $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ ,  $T > 0$ .

**Определение.** Неотрицательную функцию  $u(x, t) \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(Q_T)$  назовём суперрешением задачи (1)–(3) в  $Q_T$ , если

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x, t) dx &\geq \int_{\Omega} u_0(x) \varphi(x, 0) dx + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \varphi(x, \tau) \int_{\Omega} k(x, y, \tau) u^l(y, \tau) dy dS_x d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} [u(x, \tau) \varphi_{\tau}(x, \tau) + u^{\mu}(x, \tau) \Delta \varphi(x, \tau) - a u^{\nu} \varphi(x, \tau)] dx d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

для всех  $t \in (0, T]$  и неотрицательных функций  $\varphi(x, t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$  таких, что  $\varphi_t, \Delta \varphi \in L^2(Q_T)$  и  $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial \nu} = 0$  при  $(x, t) \in S_T$ . Неотрицательную функцию  $u(x, t) \in C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(Q_T)$  назовём субрешением задачи (1)–(3) в  $Q_T$ , если (4) выполняется с неравенством противоположного знака. Функцию  $u(x, t)$  назовём решением задачи (1)–(3) в  $Q_T$ , если  $u(x, t)$  является субрешением и суперрешением задачи (1)–(3) в  $Q_T$ .

Доказывается существование локального решения задачи (1)–(3).

**Теорема 1.** Задача (1)–(3) имеет решение в  $Q_T$  при достаточно малых значениях  $T$ .

Установлен принцип сравнения для субрешений и суперрешений задачи (1)–(3) в  $Q_T$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\bar{u}$  и  $\underline{u}$  – суперрешение и субрешение задачи (1)–(3) в  $Q_T$ , соответственно. Предположим, что  $\max\{\underline{u}(x, t), \bar{u}(x, t)\} \geq \delta$  для некоторого положительного  $\delta$ , почти всюду в  $Q_T$ , если  $l < 1$ . Тогда  $\bar{u}(x, t) \geq \underline{u}(x, t)$  почти всюду в  $Q_T$ .

Для формулировки теоремы о глобальном существовании решений предположим, что

$$\|k(x, y, t)\|_{L^{\infty}(\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, \infty))} = K_{\infty} < \infty.$$

**Теорема 3.** Пусть выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий:

- 1)  $l + \mu \leq 2$ ,
- 2)  $\nu > \mu + l - 1$ ,
- 3)  $l + \mu > 2$ ,  $\nu = \mu + l - 1$  и  $a/K_{\infty}$  – достаточно велико.

Тогда все решения задачи (1)–(3) существуют глобально.

Для формулировки теоремы об отсутствии глобальных решений предположим, что для некоторого  $\tau > 0$

$$\operatorname{ess\,inf}_{\partial\Omega \times \bar{\Omega} \times [0, \tau]} k(x, y, t) = k_0 > 0. \quad (5)$$

**Теорема 4.** Пусть выполняется (5),  $l + \mu > 2$  и  $\nu < \mu + l - 1$  или  $\nu = \mu + l - 1$  и  $a/k_0$  – достаточно мало. Тогда существуют решения задачи (1)–(3), обращающиеся в бесконечность за конечное время.

Результаты доклада опубликованы в [14].

### Литература

1. Gladkov, A. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov, K.I. Kim // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 338. – P. 264–273.
2. Gladkov, A. Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition / A. Gladkov, M. Guedda // Nonlinear Anal. – 2011. – Vol. 74. – P. 4573–4580.
3. Cui, Z. Blow-up of solutions for nonlinear parabolic equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition / Z. Cui, Z. Yang, R. Zhang // Appl. Math. Comput. – 2013. – Vol. 224. – P. 1–8.
4. Fang, Z.B. Global and blow-up solutions for the nonlocal p-Laplacian evolution equation with weighted nonlinear nonlocal boundary condition / Z.B. Fang, J. Zhang // J. Integral Equat. Appl. – 2014. – Vol. 26. – P. 171–196.
5. Gladkov, A. Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov, T. Kavitova // Math. Methods Appl. Sci. – 2020. – Vol. 43. – P. 5464–5479.
6. Gladkov, A. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov, T. Kavitova // Appl. Anal. – 2016. – Vol. 95. – P. 1974–1988.
7. Liu, B. Blow-up analyses in reaction-diffusion equations with nonlinear nonlocal boundary flux / B. Liu, H. Lin, F. Li, X. Wang // Z. Angew. Math. Phys. – 2019. – Vol. 70. – P. 1–27.
8. Liu, B. Blow-up estimate in reaction-diffusion equation with nonlinear nonlocal flux and source / B. Liu, G. Wu, X. Sun, F. Li // Comp. Math. Appl. – 2019. – Vol. 78. – P. 1862–1877.
9. Lu, H. Blowup time estimates for the heat equation with a nonlocal boundary condition / H. Lu, B. Hu, Z. Zhang // Z. Angew. Math. Phys. – 2022. – Vol. 73. – P. 1–15.
10. Gladkov, A. Global existence and blow-up of solutions of nonlinear nonlocal parabolic equation with absorption under nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov // Monatsh. Math. – 2024. – Vol. 203. – P. 357–372.
11. Gladkov, A. Global existence and blow-up of solutions for a parabolic equation with nonlinear memory and absorption under nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov // Lobachevskii J. Math. – 2024. – Vol. 45. – P. 1703–1712.
12. Gladkov, A. Initial boundary value problem for a semilinear parabolic equation with absorption and nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov // Lith. Math. J. – 2017. – Vol. 57. – P. 468–478.
13. Gladkov, A. Blow-up problem for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal Neumann boundary condition / A. Gladkov // Commun. Pure Appl. Anal. – 2017. – Vol. 16. – P. 2053–2068.
14. Gladkov, A. Blow-up problem for porous medium equation with absorption under nonlinear nonlocal boundary condition / A. Gladkov // Math. Methods Appl. Sci. – 2025. – <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/mma.70391>.

## О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ЯКОБИЕВЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Ю.Ю. Гнездовский, П.Б. Павлючик, А.Ф. Проневич

В работе рассматривается задача Дарбу [1] о построении первых интегралов по частным интегралам [2] для вещественной полиномиальной системы с частными производными

$$\mathfrak{L}_j(x) y \equiv \sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \partial_{x_i} y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \leq n, \quad (1)$$

построенной посредством не являющихся линейно связанными [3, с. 113 – 114] на пространстве  $\mathbb{R}^n$  линейных дифференциальных операторов  $\mathfrak{L}_j$  с полиномиальными координатными функциями  $u_{ji}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . При этом у полиномов  $u_{ji}$  степени таковы, что  $\max\{\deg u_{ji}: i = 1, \dots, n\} = p_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , а  $\max\{p_j: j = 1, \dots, m\} = p$ .

При наличии у системы с частными производными (1) некоторого числа *вещественных частных интегралов*  $(w_k, W_k)$ ,  $k = 1, \dots, \theta + r$ , среди которых содержится  $\theta \geq 0$  кратных

$$((w_l, W_l), (h_{\xi_l}, q_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}}, Q_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}})), \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = 1, \dots, \delta_{\xi_l}, \quad \xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l, \quad l = 1, \dots, \theta,$$

с кратностями  $\kappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \delta_{\xi_l}$ ,  $l = 1, \dots, \theta$ , *комплекснозначных полиномиальных частных интегралов*  $(\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}})$ ,  $\mathfrak{k} = 1, \dots, \vartheta + \mathfrak{r}$ , среди которых содержится  $\vartheta \geq 0$  кратных

$$((\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}}), (\mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}, \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}})), \quad \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} = 1, \dots, v_{\zeta_{\mathfrak{l}}}, \quad \zeta_{\mathfrak{l}} = 1, \dots, \epsilon_{\mathfrak{l}}, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \vartheta,$$

с кратностями  $\varkappa_{\mathfrak{l}} = 1 + \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}} v_{\zeta_{\mathfrak{l}}}$ ,  $\mathfrak{l} = 1, \dots, \vartheta$ , и *условных частных интегралов*  $(\exp s_{\tau}, S_{\tau})$ ,  $\tau = 1, \dots, t$ , на их основании можно построить первый интеграл и последний множитель системы с частными производными (1). Это число прежде всего зависит от чисел  $n, m, p_1, \dots, p_m$ , по которым строим числа  $\mathfrak{c} = \sum_{j=1}^m \mathfrak{c}_j$ ,  $\mathfrak{c}_j = \binom{n+p_j-1}{n}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Если система с частными производными (1) является якобиевой [4, с. 62], то условия о количестве частных интегралов, достаточных для построения первого интеграла и последнего множителя, в подавляющем числе случаев могут быть ослаблены.

Так, например, для якобиевой системы (1) верно следующее утверждение, обобщающее результаты полученные в работе [5, с. 62 – 65] при построении комплекснозначных первых интегралов и последних множителей комплексных якобиевых дифференциальных систем.

**Теорема.** Пусть якобиевая полиномиальная система с частными производными первого порядка (1) имеет  $\mathfrak{c}_{\xi} + 1$ ,  $\xi \in \{1, \dots, m\}$ , частных интегралов и верны условия:

1) дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\mathfrak{L}_{\xi}(x) y = 0, \quad \xi \in \{1, \dots, m\},$$

не имеет полиномиальных первых интегралов видов

$$\begin{aligned} \Xi_j: x \rightarrow & \sum_{k=1}^{\theta+r} \alpha_k W_{kj}(x) + 2 \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} \gamma_{\mathfrak{k}} \operatorname{Re} \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}j}(x) + \sum_{l=1}^{\theta} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\delta_{\xi_l}} \alpha_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}} Q_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}, j}(x) + \\ & + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{Im} \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}j}(x) + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\vartheta} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}} \sum_{g_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{v_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \varphi_{\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Re} \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}, j}(x) + \\ & + \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\vartheta} \sum_{\zeta_{\mathfrak{l}}=1}^{\epsilon_{\mathfrak{l}}} \sum_{g_{\zeta_{\mathfrak{l}}}=1}^{v_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \psi_{\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}} \operatorname{Im} \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \mathfrak{g}_{\zeta_{\mathfrak{l}}}, j}(x) + \sum_{\tau=1}^t \beta_{\tau} S_{\tau j}(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad j \neq \xi, \quad \xi \in \{1, \dots, m\}; \end{aligned}$$

2) существуют точки  $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j) \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $j \neq \xi$ , такие, что

$$W_{kj}(x^j) = 0, \quad k = 1, \dots, \theta + r, \quad Q_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}, j}(x^j) = 0, \quad g_{\xi_l} = 1, \dots, \delta_{\xi_l}, \quad \xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l, \quad l = 1, \dots, \theta,$$

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}j}(x^j) = 0, \quad \mathfrak{k} = 1, \dots, \vartheta + \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}, j}(x^j) = 0, \quad g_{\zeta_l} = 1, \dots, v_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \vartheta,$$

$$S_{\tau j}(x^j) = 0, \quad \tau = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m, \quad j \neq \xi.$$

Тогда первым интегралом типа Дарбу яacobиевой системы с частными производными (1) будет скалярная функция  $F: x \rightarrow X(x) \exp Y(x) \quad \forall x \in G \subset \mathbb{R}^n$ , где функции

$$X: x \rightarrow \prod_{k=1}^{\theta+r} w_k^{\alpha_k}(x) \prod_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x))^{\gamma_{\mathfrak{k}}} \quad \forall x \in G,$$

$$Y: x \rightarrow \sum_{l=1}^{\theta} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\delta_{\xi_l}} \alpha_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x)} +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{l}=1}^{\vartheta} \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{v_{\zeta_l}} \left( \varphi_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) + \psi_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) \right) + \sum_{\tau=1}^t \beta_{\tau} s_{\tau}(x) \quad \forall x \in G,$$

а вещественные постоянные

$$\alpha_k, k = 1, \dots, \theta + r, \quad \alpha_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}}, h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, g_{\xi_l} = 1, \dots, \delta_{\xi_l}, \quad \xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l, \quad l = 1, \dots, \theta, \quad \gamma_{\mathfrak{k}}, \eta_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{k} = 1, \dots, \vartheta + \mathfrak{r},$$

$$\varphi_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \psi_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, h_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, g_{\zeta_l} = 1, \dots, v_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \vartheta, \quad \beta_{\tau}, \tau = 1, \dots, t.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф25КИ-087 от 06.02.2025.

### Литература

1. Darboux, G. Mémoire sur les équations différentielles algebriques du premier ordre et du premier degré / G. Darboux // Bull. des Sciences Math. – 1878. – Vol. 2. – P. 60–96, 123–144, 151–200.
2. Горбузов, В. Н. Интегралы дифференциальных систем / В. Н. Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 447 с.
3. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
4. Гюнтер, Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н. М. Гюнтер. – Л.-М. : ОНТИ, 1934. – 359 с.
5. Буслюк, Д. В. Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ Д.В.Буслюк. – Гродно, 2000. – 95 с.

## ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЯТОГО ПОРЯДКА

В.В. Дайняк

Относительно функции  $u(x)$ ,  $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ , рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^5} + a \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^4 \partial x_1} + b \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^3 \partial x_1^2} + c \frac{\partial^5 u}{\partial x_0^2 \partial x_1^3} + d \frac{\partial^5 u}{\partial x_0 \partial x_1^4} + e \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^5} + \mathcal{L}_1(x, D)u = f(x), \\ \mathcal{L}_1(x, D)u = \sum_{i,j=0}^1 P_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^1 P_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda(x)u. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a, b, d, c, e$  – постоянные, коэффициенты полинома  $\mathcal{L}_1(x, D)u$  и их производные измеримы и ограничены.

Пусть  $\Omega$  – некоторая замкнутая область с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$ . Обозначим через  $\nu$  единичный вектор внешней нормали относительно поверхности  $\partial\Omega$ . Пусть  $\mathcal{L}_0(\nu) = \nu_0^5 + a\nu_0^4\nu_1 + b\nu_0^3\nu_1^2 + c\nu_0^2\nu_1^3 + d\nu_0\nu_1^4 + e\nu_1^5$ . К уравнению (1) присоединим однородные граничные условия вида:

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial\Omega^-} = 0, \quad (2)$$

где  $\partial\Omega^-$  – часть границы  $\partial\Omega$ , в точках которой  $\mathcal{L}_0(\nu) < 0$ .

Также рассмотрим сопряжённую для (1) – (2) задачу:

$$\mathcal{L}^*v = g(x), \quad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\partial\Omega^+} = 0, \quad (4)$$

где  $\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega | \mathcal{L}_0(\nu) > 0\}$ .  $\mathcal{L}^*(x, D)$  – формально сопряжённый к  $\mathcal{L}$  оператор.

Для исследования на разрешимость задач (1) – (2) ( (3) – (4) ) вводятся подпространства пространства Соболева  $H_0^l(\Omega)$  ( $\dot{H}^l(\Omega)$ ),  $l = \overline{1, 2}$ . Строятся расширения  $L$  и  $L^*$  операторов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}^*$ .

Обобщённым решением задачи (1) – (2) назовем решение операторного уравнения

$$Lu = f, \quad u \in D(L),$$

а обобщённым решением сопряжённой задачи – решение операторного уравнения

$$L^*v = g, \quad v \in D(L^*).$$

Условие 1. Пусть выполняется одно из условий

- а) Если  $d > 0$ , то  $5c^2 + 4a^2d - 15bd < 0$ ;
- б) Если  $a < 0$ ,  $c < 0$ ,  $e < 0$ , то  $4ad^2 + 5b^2e - 15ace > 0$ ;
- в) Если  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $e > 0$ , то  $4ad^2 + 5b^2e - 15ace < 0$ ;
- г) Если  $a = 0$ ,  $b = 0$ , то  $4d^2 - 15ce < 0$ .

Условие 2. Пусть матрица  $P(x)$ , состоящая из функций  $P_{ij}(x)$ , и коэффициенты  $P_i(x)$  полинома  $\mathcal{L}_1(x, D)$  таковы, что

$$y^\top P(x)y < 0, \quad \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \frac{\partial P_i(x)}{\partial x_i} + \lambda(x) < 0$$

для любых  $x \in \overline{\Omega}$  и  $y \in \mathbb{R}^2$ .

**Теорема 1.** При выполнении условий 1 и 2 для любых  $u \in H_0^2(\Omega)$ ,  $(v \in \dot{H}^2(\Omega))$  справедливы энергетические неравенства

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{H_0^{-2}(\Omega)}, \quad \|v\|_{\dot{H}^2(\Omega)} \leq C^* \|L^*v\|_{\dot{H}^{-2}(\Omega)},$$

где постоянные  $C > 0$  и  $C^* > 0$  не зависят от  $u$  и  $v$ .

**Теорема 2.** При выполнении условий 1 и 2 для любого  $f \in H_0^{-2}(\Omega)$  ( $g \in \dot{H}^{-2}(\Omega)$ ) существует единственное обобщённое решение задач (1) – (2) ((3) – (4)).

### Литература

1. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения / В. И. Корзюк. – БГУ, 2013. – 368 с.
2. Дайняк, В. В. Задача типа Дирихле для составного уравнения третьего порядка / В. В. Дайняк, В. И. Корзюк, А. А. Пронько // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 116–121.
3. Дайняк, В. В. Краевые задачи для линейного дифференциального уравнения четвёртого порядка / В. В. Дайняк / Современные методы теории краевых задач // Материалы междунар. конф.: XXXVI Воронежская весенняя матем. школа «Понтрягинские чтения – XXXVI» (30 апреля – 4 мая 2025 г.). – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2025. – С.114–116.

## ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д.С. Жалукевич

В данной работе ищутся преобразования эквивалентности семейств квазилинейных уравнений второго порядка функции двух переменных

$$u_{tx} = f(t, x, u, u_t, u_x), \quad (1)$$

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x), \quad (2)$$

$$u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x), \quad (3)$$

то есть такие инфинитезимальные преобразования зависимой и независимой переменной, которые оставляют на месте все семейство уравнений, преобразуя при этом каждое уравнение семейства в, возможно, некоторое другое уравнение этого же семейства. Такой класс симметрий был введен независимо в работах Кингстон–Софоклеус [1–3], в работах Цеслинского [4–7] и в работах Ибрагимова–Торрисы–Валенти [8, 9]. В работе Кингстон–Софоклеус данный вид симметрий носит название преобразование сохраняющие форму, а в работе Ибрагимова–Торрисы–Валенти преобразования эквивалентности и используется для предварительной классификации уравнений. В работах же Цеслинского данный вид симметрий носит название расширенных симметрий и использован для поиска спектрального параметра.

Было найдено что, среди рассматриваемых семейств и подсемейств уравнений (1) – (3) конечномерными алгебрами эквивалентности обладают следующие семейства уравнений:  $u_{xx} = f(u_t, u_x)$  – десятимерная алгебра;  $u_{xx} = f(u_t)$  – девятимерная алгебра;  $u_{tx} = f(u_t, u_x)$ ,  $u_{tt} + u_{xx} = f(u_t, u_x)$  – восьмимерная алгебра;  $u_{tx} = f(u, u_x)$ ,  $u_{tx} = f(u)$ ,  $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$ ,  $u_{xx} = f(u, u_t)$  – шестимерная алгебра;  $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_x)$  – пятимерная алгебра. В работе [10] было исследовано семейство квазилинейных эллиптических уравнений. В данной

работе мы расширяем полученный результат на случай семейств квазилинейных гиперболических и параболических уравнений. Например, справедлива следующая теорема для семейств квазилинейных параболических уравнений.

**Теорема.** *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений  $u_{xx} = f(u_t, u_x)$  порождаются векторными полями:*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \partial_t, Y_2 = \partial_x, Y_3 = \partial_u, Y_4 = t\partial_t - u_t\partial_{u_t}, Y_5 = t\partial_x - u_x\partial_{u_x}, \\ Y_6 &= t\partial_u + \partial_{u_t}, Y_7 = x\partial_u + \partial_{u_x}, Y_8 = x\partial_x - 2f\partial_f - u_x\partial_{u_x}, \\ Y_9 &= u\partial_u + f\partial_f + u_t\partial_{u_t} + u_x\partial_{u_x}, Y_{10} = u\partial_x - 3u_xf\partial_f - u_tu_x\partial_{u_t} - u_x^2\partial_{u_x}. \end{aligned}$$

Также в работе была проведена симметричная редукция для следующих семейств уравнений:  $u_{tx} = f(t, x, u)$ ,  $u_{tx} = f(x, u)$ ,  $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$ ,  $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ ,  $u_{xx} = f(t, x, u)$ .

### Литература

1. Kingston J.G, Sophocleous C. On point transformations of a generalized Burgers equation. Phys. Lett. A. 1991; 155: 15–19.
2. Kingston J.G, Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations. J. Phys. A: Math. Gen. 1998; 31: 1597–1619.
3. Kingston J.G, Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation. Int. J. Non-Linear Mech. 2001; 36: 987–997.
4. Cieslinski J.L. Lie symmetries as a tool to isolate integrable geometries. Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems (Proceedings of the 7-th NEEDS conference, Baia Verde, Gallipoli (Italy), June 1991), pp. 260–268, M.Boiti, L.Martina, F.Pempinelli (eds.); World Scientific, Singapore 1992.
5. Cieslinski J.L. Group interpretation of the spectral parameter in the case of nonhomogeneous, non-linear Schrodinger system. Journal of Mathematical Physics. 1993; 34(6): 2372–2384. DOI:10.1063/1.530122.
6. Cieslinski J.L, Goldstein P, Sym A. On integrability of the inhomogeneous Heisenberg ferromagnet model: examination of a new test. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1994; 27(12): 1645–1664. DOI:10.1088/0305-4470/26/6/017.
7. Cieslinski J.L, Zhalukevich D.S. Spectral parameter as a group parameter. Symmetry. 2022; 14(12): 2577. DOI:10.3390/sym14122577.
8. Ibragimov N.H, Torrisi M, Valenti A. Preliminary group classification of equations  $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ . Journal of Mathematical Physics. 1991; 32: 2988–2995. DOI:10.1063/1.529042.
9. Torrisi M, Tracina R, Valenti A. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation. Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Netherlands. 1993. pp. 367–375.
10. Жалукевич Д. С. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных/ Д. С. Жалукевич// Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 27–37.

## ТРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

С.С. Каянович

**Обзор публикаций с направлением исследований, совпадающим с направлением данного доклада.** В монографии 1984 года издания отмечалось, что достовер-

ные результаты удаётся практически получать лишь в диапазоне значений чисел Рейнольдса  $Re$  до  $10^3$  [1]. В этом же 1984 году в Белорусском республиканском научно-производственном объединении «Центр» (БР НПО «Центр») были получены достоверные численные результаты в диапазоне значений  $Re$  от  $8 \cdot 10^3$  до  $3 \cdot 10^4$ . Эти результаты прекрасно согласуются с экспериментальными данными во всём диапазоне значений  $8 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^4$  чисел  $Re$ , причём качество согласования не зависит от конкретного значения рассматриваемого  $Re$ . Результаты содержатся в научных отчётах БР НПО «Центр» а также в статье [2]. Имеется справка о внедрении указанных результатов в производственный процесс объединения, в которой говорится о точности получаемых численных решений и большой скорости, с которой они могут быть получены. Численный метод, который позволяет получать такие решения, успешно применялся в производственной деятельности БР НПО «Центр» по созданию газовых подвесов (подшипников) в течение 1984 – 1989 гг. Его можно найти в диссертации [3].

**Теоретическое обоснование математической модели течения вязкой несжимаемой жидкости.** Численный метод, позволяющий получать прекрасные результаты, основан на математической модели, которая позже была названа моделью «стержневого течения» и первый шаг к открытию которой был сделан в [4]. В [5] впервые даны определения стержневого течения и его стержня. Не следует путать стержневое течение, о котором идёт разговор (перевод на английский звучит *rod flow*) с уже давно существующим в гидродинамике идеализированным «стержневым течением» (перевод на английский *plug flow*) и не связанным с решением уравнений Навье – Стокса. В работах [6–9] проводились исследования дифференциальных моделей стержневых течений (*rod flow*) на предмет существования и единственности их гладких решений в области, имеющей вид прямоугольника со сглаженными углами, и в области, имеющей вид прямоугольного параллелепипеда со сглаженными углами, и были доказаны соответствующие теоремы. Теоремы сформулированы в [8;9]. В [9] теорема доказана на временных слоях.

### Литература

1. Пасконов, В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – Москва : Наука, 1984. – 288 с.
2. Каянович, С. С. Статические характеристики сферических газовых подвесов с поверхностями скольжения равной кривизны / С. С. Каянович, М. И. Павлинов, Б. И. Смирнов, И. М. Тетёркина // Машиноведение. – 1985. – № 4. – С. 89–94.
3. Каянович, С. С. Численное моделирование в теории смазки. – Дис. ... канд. физ.-мат. наук / С. С. Каянович. – Минск : ИМ АН БССР, БР НПО «ЦЕНТР», 1988. – 175 с.
4. Каянович, С. С. Уравнения Навье–Стокса и парадоксы вязкой несжимаемой жидкости / С. С. Каянович // Труды БГТУ. – 1995. – Вып. II, сер. V. – С. 49–55.
5. Каянович, С. С. Стержневое течение вязкой жидкости / С. С. Каянович // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-тэхн. навук. – 2013. – № 3. – С. 32–35.
6. Каянович, С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения / С. С. Каянович // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 52–59.
7. Каянович, С. С. Краевая задача для стержневого течения в канале / С. С. Каянович // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 4. – С. 55–66.
8. Каянович, С. С. Математические вопросы двухмерной гидродинамики / С. С. Каянович. – Минск : Бестпринт, 2024. – 432 с.
9. Kayanovich, S. On the Solvability of a differential-difference Problem for the Navier–Stokes Equations /S. Kayanovich // International Conference “Scientific research of the SCO countrics : synergy and integration”. Beijing, PRC – 2024. – Part 3. – P. 145–151.

## КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

**В.И. Корзюк, И.С. Козловская**

В работе на примере первой смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, заданного в полуполосе, показывается, что решение или его производные терпят разрыв на определенном множестве характеристик внутри области задания уравнения, если отсутствуют полностью или частично однородные условия согласования в угловых точках на заданные функции граничных условий и правой части уравнения.

### Постановка задачи.

В замыкании  $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$  области  $Q = (0, \infty) \times (0, l)$  двух независимых переменных  $\mathbf{x} = (x_0, x_1) \in Q \subset \mathbb{R}^2$  рассмотрим волновое уравнение

$$(\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \quad (1)$$

где  $a^2, l$  – положительные действительные числа,  $\partial_{x_0}^2 = \partial^2 / \partial x_0^2$ ,  $\partial_{x_1}^2 = \partial^2 / \partial x_1^2$  – частные производные по  $x_0$  и  $x_1$  второго порядка. К уравнению (1) на части границы  $\partial Q$  области  $Q$  присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad (2)$$

и граничные условия на других частях границы  $\partial Q$

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty). \quad (3)$$

Здесь  $f : \bar{Q} \ni \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$  – заданная функция на  $\bar{Q}$ ,  $\varphi : [0, l] \ni x_1 \rightarrow \varphi(x_1) \in \mathbb{R}$ ,  $\psi : [0, l] \ni x_1 \rightarrow \psi(x_1) \in \mathbb{R}$  – функции на  $[0, l]$ ,  $\mu^{(j)} : [0, \infty) \ni x_0 \rightarrow \mu^{(j)}(x_0) \in \mathbb{R}$  – заданные функции на  $[0, \infty)$ , гладкость которых будет уточнена ниже,  $j = 1, 2$ .

Функции  $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ , удовлетворяют следующим неоднородным условиям согласования:

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \mu^{(1)}(0) &= \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{a} (d\mu^{(1)}(0) - \psi(0)) = \delta^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2} (a^2 d^2 \varphi(0) - d^2 \mu^{(1)}(0) + f(0, 0)) &= \delta^{(3)}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(0) - \varphi(l) &= \sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{a} (d\mu^{(2)}(0) - \psi(l)) = \sigma^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2} (d^2 \mu^{(2)}(0) - a^2 d^2 \varphi(l) - f(0, l)) &= \sigma^{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $d\mu^{(j)}$  и  $d^2 \mu^{(j)}$  – производные функции  $\mu^{(j)}$  первого и второго порядков,  $j = 1, 2$ ,  $d^2 \varphi$  – производная второго порядка функции  $\varphi$ .

Запишем однородные условия согласования для заданных функций задачи (1) – (3),

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \mu^{(1)}(0) &= 0, \quad d\mu^{(1)}(0) - \psi(0) = 0, \\ a^2 d^2 \varphi(0) - d^2 \mu^{(1)}(0) + f(0, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(0) - \varphi(l) &= 0, \quad d\mu^{(2)}(0) - \psi(l) = 0, \\ d^2 \mu^{(2)}(0) - a^2 d^2 \varphi(l) - f(0, l) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для достаточно гладких заданных функций уравнения (1) на множестве  $\bar{Q}$  и условий (2), (3) на отрезке  $[0, l]$  и полупрямой  $[0, \infty)$  существует единственное классическое решение из  $C^2(\bar{Q})$  этой задачи тогда и только тогда, когда условия согласования (4), (5) для этих функций являются однородными. В противном случае на определенных характеристиках в области  $Q$  решение  $u$  задачи (1) – (3) вместе с производными терпят разрывы. Эти разрывы можно записать в виде условий сопряжения.

Таким образом, в общем случае (в случае неоднородных условий согласования) задачу (1) – (3) можно заменить на задачу (1) – (5) с условиями сопряжения на характеристиках, где скачки функций и ее производных выражаются через заданные действительные числа  $\delta^{(j)}$  и  $\sigma^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \quad (8)$$

где

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_0^{x_0} d\tau \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi,$$

$g^{(j)} \in C^2(D(g^{(j)}))$ ,  $j = 1, 2$ , если  $u \in C^2(\bar{Q})$ ;  $D(g^{(1)}) = (-\infty, l]$ ,  $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{Q}$ .

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если функции  $\varphi \in C^2[0, l]$ ,  $\psi \in C^1[0, l]$ ,  $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$ ,  $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$ ,  $j = 1, 2$ , то функция вида (8) является единственным классическим решением из класса  $C^2(Q)$  задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (6), (7).

**Теорема 2.** Если для заданных функций  $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) не выполняются однородные условия согласования (6), (7), то, какими бы гладкими эти функции не были, задача (1) – (3) не имеет классического решения из  $C^2(\bar{Q})$ , определенного на  $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ .

**Теорема 3.** Если заданные функции задачи (1) – (3) удовлетворяют неоднородным условиям согласования (4), (5), то решение задачи (1) – (3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристиках  $x_1 - ax_0 = -(k-1)l$  и  $x_1 + ax_0 = kl$ ,  $k = 1, 2, \dots$

## КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ

В.И. Корзюк, И.И. Столярчук

Задача рассматривается на плоскости двух независимых переменных  $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ . В области  $Q = (0; \infty) \times (0; l)$ ,  $l \in (0; +\infty)$  задается гиперболическое уравнение теплопроводности вида

$$b^2 \partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u + a^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_{x_0} u + a^{(2)}(\mathbf{x}) \partial_{x_1} u + \lambda(\mathbf{x}) u = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  — некоторые заданные числа,  $a^{(j)}(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2$ ,  $f$  — некоторые заданные функции. К уравнению (1) присоединяются начальные условия типа Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0; l],$$

и граничные условия второго рода

$$\partial_{x_1} u(\mathbf{x}) \Big|_{x_1=j} = \mu^{(j)}(x_0), j \in \{0, l\}. \quad (2)$$

Следуя методу характеристик, множество  $\overline{Q}$  с помощью характеристик  $bx_1 - ax_0 = -kbl$ ,  $bx_1 + ax_0 = (k+1)bl$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  разбивается на подмножества  $\overline{Q}^{(k,j)}$ , такие что  $\overline{Q}^{(k)} = \bigcup_{j=1}^4 \overline{Q}^{(k,j)}$ , и  $\overline{Q} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^4 \overline{Q}^{(k,j)}$ .

Уравнение (1) можно представить в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4a^2b^2} \int_{-kbl}^{bx_1-ax_0} \int_{(k+1)bl}^{bx_1+ax_0} (a^{(1)}\partial_{x_0}u^{(k)} + a^{(2)}\partial_{x_1}u^{(k)} + \lambda u^{(k)} - f) \left( \frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2b} \right) d\xi d\eta + \\ + p^{(k)}(bx_1 - ax_0) + g^{(k)}(bx_1 + ax_0). \quad (3)$$

Справедлива теорема

**Теорема 1.** Пусть  $a^{(1)}, a^{(2)}, \lambda, f \in C^1(Q)$ . Тогда решение  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  уравнения (3) существует и единственно в классе  $C^2(Q^{(k)})$  тогда и только тогда, когда

$$p^{(k)} \in C^2([- (k+1)bl; - (k-1)bl]), \quad g^{(k)} \in C^2([kbl; (k+2)bl]).$$

В процессе решения задачи с граничными условиями (2) в областях  $\overline{Q}^{(k,2)}, \overline{Q}^{(k,3)}$  возникают обыкновенные дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций  $p^{(k)}$  и  $g^{(k)}$  соответственно. После подстановок этих функций в (3), решения  $u^{(k)}$  в этих областях записываются как

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{-kbl}^{bx_1-ax_0} \int_{(k+1)bl}^{bx_1+ax_0} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dydz + \int_{-kbl}^{bx_1-ax_0} Z^{(k)}(\xi_1) d\xi_1 + \\ + C_p + g^{(k)}(bx_1 + ax_0), \mathbf{x} \in \overline{Q}^{(k,2)}, \quad (4)$$

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \int_{-kbl}^{bx_1-ax_0} \int_{(k+1)bl}^{bx_1+ax_0} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dydz + p^{(k)}(bx_1 - ax_0) + \int_{(k+1)bl}^{bx_1+ax_0} Y^{(k)}(\eta_1) d\eta_1 + C_g, \\ \mathbf{x} \in \overline{Q}^{(k,3)}, \quad (5)$$

где  $Z^{(k)}(\xi), Y^{(k)}(\eta)$  не содержат неизвестных на  $\overline{Q}^{(k,2)}, \overline{Q}^{(k,3)}$ , соответственно, функций.

Для задачи (1)–(2) с помощью метода характеристик и с учетом теоремы 1 доказываются критерий разрешимости

**Теорема 2.** Пусть  $\mu^{(0)}, \mu^{(l)} \in C^1([0; \infty))$ ,  $a^{(1)}, a^{(2)}, \lambda, f \in C^1(\overline{Q})$ ,  $\varphi \in C^2([0; l])$ ,  $\psi \in C^1([0; l])$ . Тогда решение  $u(\mathbf{x})$  задачи (1)–(2) существует и единственно в классе  $C^2(\overline{Q})$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\mu^{(0)}(0) - d\varphi(0) = 0, \quad -d\mu^{(0)}(0) + d\psi(0) = 0,$$

$$\mu^{(l)}(0) - d\varphi(l) = 0, \quad d\mu^{(l)}(0) - d\psi(l) = 0$$

и константы  $C_p$  в (4),  $C_g$  в (5) для каждого  $k$  выбираются по формулам

$$C_p = \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(0) - \frac{1}{2}\Psi^{(k)}(0) + \int_{(k+1)bl}^{kbl} \int_{-kbl}^{\eta-2kbl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{C}{2},$$

$$C_g = \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(l) + \frac{C}{2},$$

где  $\mathcal{L}u^{(k)}(y, z) = -1/(4a^2b^2) (a^{(1)}\partial_{x_0}u^{(k)} + a^{(2)}\partial_{x_1}u^{(k)} + \lambda u^{(k)} - f) ((z-y)/(2a), (z+y)/(2b))$ , а функция  $\Psi^{(k)}(x_1) = b/a \int_l^x \psi^{(k)}(\xi) d\xi$ . Функции  $\varphi^{(k)}(x_1) = u^{(k-1)}(kl/a, x_1)$ ,  $\psi^{(k)}(x_1) = \partial_{x_0}u^{(k-1)}(kl/a, x_1)$ ,  $\varphi^{(0)}(x_1) = \varphi(x_1)$ ,  $\psi^{(0)}(x_1) = \psi(x_1)$ .

### Литература

1. Вулих, Б. З. Введение в функциональный анализ / Б. З. Вулих. – Москва : Наука, 1967. – 416 с.
2. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1967. – 565 с.
3. Столярчук, И. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения колебания струны с линейными дифференциальными полиномами в граничных условиях / И. И. Столярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 288–298. – <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298>.
4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики Изд. 2-е, испр. и доп. / В. И. Корзюк. – Москва: Ленанд, 2021. – 479 с.

## МОДЕЛЬ КЕЙНСА И УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов

Одной из самых известных математических моделей макроэкономики можно считать ту, которая получила название модель Кейнса [1-3]. В одном из самых простых, но содержательных вариантов она в нормированном виде имеет следующий вид

$$u'_1 = \frac{u_2}{u_1} - \gamma, \quad u'_2 = \frac{u_2^2}{u_1} - u_1u_2, \quad (1)$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}_+$  и играет роль основного параметра. Система дифференциальных уравнений (1) имеет состояние равновесия  $S_0 : u = \gamma, v = \gamma^2$ , которое асимптотически устойчиво, если  $\gamma \in (0, 1]$  и оно неустойчиво при  $\gamma \in (1, \infty)$ . Если  $\gamma = 1 + \varepsilon$ , то в окрестности состояния экономического равновесия  $S_0$  у нее существует асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл.

Вместе с тем с экономической точки зрения более содержателен вариант этой модели, когда учтены пространственные факторы, т.е. рассмотрены варианты, когда  $u_1 = u_1(t, x, y)$ ,  $u_2 = u_2(t, x, y)$  и вместо системы (1) рассмотрена система дифференциальных уравнений с частными производными

$$u_{1t} = \frac{u_2}{u_1} - \gamma + d_1\Delta u_1, \quad u_{2t} = \frac{u_2^2}{u_1} - u_1u_2 + d_2\Delta u_2, \quad (2)$$

где  $d_1, d_2 > 0$  и  $\Delta$  – оператор Лапласа, относительно пространственных переменных  $x, y$ . Систему реакция-диффузия (2), как правило, рассматривают вместе с краевыми условиями непроницаемости (однородными краевыми условиями Неймана) (см. [2, 3]).

В докладе речь пойдет о некоторых бифуркационных задачах, которые были изучены для системы (2).

Пусть  $(x, y) \in G = \{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ , т.е. область квадрат. При этом анализ системы (2), дополненной однородными краевыми условиями Неймана может быть сведен к анализу нелинейной краевой задачи (КЗ)

$$w_{tt} + Bw_t + Aw = F_2(w) + F_3(w) + F_0(w), \quad (3)$$

$$w_x|_{x=0, x=\pi} = w_{xx}|_{x=0, x=\pi} = w_y|_{y=0, y=\pi} = w_{yy}|_{y=0, y=\pi} = 0. \quad (4)$$

$$Aw = \gamma(qd^2\Delta^2w + (1-q)d\Delta w + w), \quad Bw_t = (1-\gamma)w_t - (1+\gamma q)d\Delta w_t,$$

$$F_2(w) = F_{21}(w) + F_{22}(w),$$

$$F_{21}(w) = \gamma\left((1-q)d^2(\Delta w)^2 + d(1-q)w\Delta w - 2d^2q[w_x(\Delta w)_x + w_y(\Delta w)_y]\right),$$

$$F_{22}(w) = (1-\gamma)(ww_t - w_t^2) + d(1+\gamma q - 2\gamma)w_t\Delta w + 2\gamma qd(w_xw_{xt} + w_yw_{yt}),$$

$$F_3(w) = F_{31}(w) + F_{32}(w),$$

$$F_{31}(w) = \gamma\left(qd^2(\Delta w)^2w + qd(\Delta w)w^2 + 2d^2q(w_x(\Delta w)_x + w_y(\Delta w)_y)w\right),$$

$$F_{32}(w) = ww_t(w_t - w) - (1+\gamma q)dw_tw\Delta w - 2\gamma qd(w_xw_{xt} + w_yw_{yt})w,$$

где  $d = d_1, d_2 = d\gamma q$ , а  $F_0(w)$  имеет в нуле порядок малости выше третьего. КЗ (3),(4) имеет состояние равновесия  $w = 0$ , которое соответствует  $S_0$ . В докладе предполагается для КЗ (3),(4) изложить результаты анализа следующих вопросов.

1) Результаты анализа устойчивости состояния равновесия  $w = 0$  КЗ (3),(4).

2) Анализ бифуркаций, возникающих в случаях близких к критическим в задаче об устойчивости нулевого решения рассматриваемой КЗ. При этом основное внимание будет уделено тем вариантам бифуркационных задач, которые возникают исключительно при зависимости  $u_1, u_2$  и, следовательно,  $w$ , от двух пространственных переменных. Некоторые из них изучены в работе [4,5].

Особо подчеркнем, что в работе [6] был рассмотрен вопрос о структуре окрестности  $S_0$  для системы реакция-диффузия (2) в случае зависимости от одной пространственной переменной и, естественно, системы дифференциальных уравнений (1).

Вариант с наличием двух пространственных переменных  $x, y$  существенно более содержателен по сравнению с уже рассмотренным в работе [6].

### Литература

1. Keynes, J. M. The general theory of employment, interest and money / J. M. Keynes. – New York: Harcourt, 1936. – 190 p.
2. Zhang, W. B. Synergetic economics: time and change in nonlinear economics / W. B. Zhang. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – 246 p.
3. Puu, T. Nonlinear economic dynamics / T. Puu. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. – 288 p.

4. Kulikov, A. N., Kulikov, D. A., Radin, M. A. Analysis of Keynes's mathematical model-effect of spatial factors / A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, M. A. Radin // Lobachevskii journal of mathematics. – 2022. – Т. 26(6). – С. 1345–1357.

5. Куликов, А. Н., Куликов, Д. А., Фролов, Д. Г. Влияние пространственных факторов на динамику решений в модели Кейнса. Случай двух пространственных переменных / А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Д. Г. Фролов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». – 2026 (в печати).

6. Куликов, А. Н., Куликов, Д. А., Фролов, Д. Г. Модель Кейнса делового цикла и задача о диффузионной неустойчивости / А. Н. Куликов, Д. А. Куликов, Д. Г. Фролов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». – 2022. – Т. 207. – С. 77–90.

## ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ЛЯПУНОВА ПО ЗАДАННОЙ РАСШИРЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

П.Е. Маковеева

Метод Ляпунова является одним из основных инструментов исследования устойчивости дифференциальных уравнений. Одним из направлений его развития является построение функционалов по заданной производной [1], позволяющее получать экспоненциальные оценки решений и исследовать робастную устойчивость.

В работе рассматривается краевая задача Дирихле для линейного уравнения параболического типа с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} u_t(x, t) = au_{xx}(x, t) + bu(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\varphi$  – начальная функция; для определенности предполагается, что  $\varphi$  абсолютно непрерывна, а  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$  – параметры краевой задачи. Далее решения задачи рассматриваются как функции, принадлежащие пространству Лебега  $L_2(0, 1)$ . Через  $\|\cdot\|$  обозначается норма этого пространства:

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \int_0^1 u^2(x, t) dx.$$

**Функционал по заданной расширенной производной.** Построим функционал Ляпунова, расширенная производная которого вдоль решений краевой задачи (1) имеет вид

$$\left. \frac{d}{dt} V(u(\cdot, t, \varphi)) \right|_{(1)} = -\alpha \|u(\cdot, t, \varphi)\|^2 - \beta \|u_x(\cdot, t, \varphi)\|^2, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2)$$

Правая часть (2) является отрицательно определенной квадратичной формой.

Используя подход, описанный в работе [2], и представление решения краевой задачи (1) через собственные функции оператора правой части дифференциального уравнения, в

предположении экспоненциальной устойчивости функционал  $V$  приводится к квадратичной форме по начальной функции  $\varphi$ :

$$V(\varphi) = \alpha \int_0^1 \int_0^1 \varphi(y_1) U(y_1, y_2) \varphi(y_2) dy_1 dy_2 + \beta \int_0^1 \int_0^1 \varphi_x(y_1) \bar{U}(y_1, y_2) \varphi_x(y_2) dy_1 dy_2. \quad (4)$$

Таким образом, функционал Ляпунова представляется в виде суммы двух квадратичных форм, каждая из которых определяется своей матрицей Ляпунова  $U$  и  $\bar{U}$  соответственно.

Далее, дифференцируя функционал вдоль решений системы и используя интегрирование по частям с учётом граничных условий, получаем выражение для производной, из которого выводятся две системы свойств, определяющих матрицы Ляпунова. Эти свойства обеспечивают совпадение производной функционала с заданной формой и, кроме того, позволяют вычислять явный вид матриц Ляпунова.

**Верхняя и нижняя оценки функционала.** Для получения оценок вводится модифицированный функционал  $\tilde{V}(\varphi) = V(\varphi) - \alpha_1 \|\varphi\|^2$ . Его производная вдоль решений краевой задачи (1) имеет вид

$$\left. \frac{d}{dt} \tilde{V}(u(\cdot, t)) \right|_{(1)} = -(\alpha + 2b\alpha_1) \|u(\cdot, t)\|^2 - (\beta - 2a\alpha_1) \|u_x(\cdot, t)\|^2.$$

Так как рассматриваемая система является экспоненциально устойчивой,  $u(\cdot, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , откуда следует, что  $V(u(\cdot, t)) \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\tilde{V}(u(\cdot, t)) \rightarrow 0$ . При подходящем выборе параметра  $\alpha_1$  производная функционала  $\tilde{V}$  вдоль решений отрицательно определена, поэтому  $\tilde{V}(u(\cdot, t))$  не возрастает и для любого  $t \geq 0$  выполняется неравенство  $\tilde{V}(u(\cdot, 0)) \geq \tilde{V}(u(\cdot, t))$ . Переходя к пределу при  $t \rightarrow \infty$  и учитывая  $\tilde{V}(u(\cdot, t)) \rightarrow 0$ , из определения функционала  $\tilde{V}$  получаем нижнюю оценку

$$V(\varphi) \geq \alpha_1 \|\varphi\|^2. \quad (5)$$

Верхняя оценка функционала  $V(\varphi)$  получается путём оценки его слагаемых в представлении (4) с использованием неравенства Коши–Буняковского и норм соответствующих матриц Ляпунова. В результате получаем итоговое неравенство

$$|V(\varphi)| \leq \max\{\alpha \|U\|, \beta \|\bar{U}\|\} (\|\varphi\|^2 + \|\varphi_x\|^2). \quad (6)$$

Из полученных оценок следует результат.

**Теорема.** Если краевая задача (1) экспоненциально устойчива, то выполняется оценка

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \gamma (\|\varphi\|^2 + \|\varphi_x\|^2)^{1/2} e^{-\sigma t},$$

где положительные константы  $\gamma$  и  $\sigma$  выражаются через параметры задачи и нормы соответствующих матриц Ляпунова следующим образом:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\max\{\alpha \|U\|, \beta \|\bar{U}\|\}}{\alpha_1}}, \quad \sigma = \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{2 \max\{\alpha \|U\|, \beta \|\bar{U}\|\}}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, <https://rscf.ru/project/23-71-10099/>.

## Литература

1. Kharitonov, V. L. Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices / V. L. Kharitonov. – Basel : Birkhäuser, 2013. – 316 p.
2. Makoveeva, P. E. Lyapunov–Krasovskii functional with prescribed derivative and Lyapunov matrix for delay system with distributed parameters / P. E. Makoveeva, A. V. Egorov // Proc. 44th Chinese Control Conference (CCC). – Chongqing, China, 2025. – P. 1120–1125.

## МЕТОД ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А.Ф. Проневич, О.Н. Белько

В конце XIX века французским математиком Ж.Г. Дарбу для рационального обыкновенного дифференциального уравнения был сформулирован подход о построении общего интеграла по известному количеству частных интегралов [1]. Его метод лёг в основу целого направления в теории интегрируемости дифференциальных систем, который в настоящее время называется задачей Дарбу (см., например, результаты и подробный обзор литературы, приведенные в монографиях [2–5]). В данной работе рассматривается задача Дарбу для вещественной полиномиальной системы уравнений с частными производными

$$\mathfrak{L}_j(x) y \equiv \sum_{i=1}^n u_{ji}(x) \partial_{x_i} y = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad y \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \leq n, \quad (1)$$

построенной посредством не являющихся линейно связанными [6, с. 113 – 114] на арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^n$  линейных дифференциальных операторов первого порядка  $\mathfrak{L}_j$  с полиномиальными координатными функциями  $u_{ji}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Метод построения комплекснозначных первых интегралов по комплекснозначным полиномиальным частным интегралам для системы (1), заданной в комплексном фазовом пространстве, был предложен в статье Д.В. Буслюка [7]. Цель данной работы состоит в разработке метода и отражении специфики построения вещественнозначных первых интегралов в областях из вещественного фазового пространства по вещественным и комплекснозначным полиномиальным частным интегралам с учетом их кратности. А именно, для системы (1) получены достаточные признаки построения вещественных первых интегралов и последних множителей по известным частным интегралам, решены задачи о модификации первого интеграла и последнего множителя типа Дарбу, установлены функциональные связи между координатными функциями сомножителей частных интегралов.

Пусть система с частными производными (1) имеет [3, с. 187–200] вещественные частные интегралы  $(w_k, W_k)$ ,  $k = 1, \dots, \theta + r$ , среди которых содержится  $\theta \geq 0$  кратных

$$((w_l, W_l), (h_{\xi_l}, q_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}}, Q_{l, h_{\xi_l} g_{\xi_l}})), \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\xi_l} = 1, \dots, \delta_{\xi_l}, \quad \xi_l = 1, \dots, \varepsilon_l, \quad l = 1, \dots, \theta,$$

с кратностями  $\kappa_l = 1 + \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \delta_{\xi_l}$ ,  $l = 1, \dots, \theta$ , комплекснозначные полиномиальные частные интегралы  $(\mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}})$ ,  $\mathfrak{k} = 1, \dots, \vartheta + \mathfrak{r}$ , среди которых содержится  $\vartheta \geq 0$  кратных

$$((\mathfrak{m}_{\mathfrak{l}}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{l}}), (h_{\zeta_{\mathfrak{l}}}, q_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_{\mathfrak{l}}} g_{\zeta_{\mathfrak{l}}}}, \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}, h_{\zeta_{\mathfrak{l}}} g_{\zeta_{\mathfrak{l}}}})), \quad h_{\zeta_{\mathfrak{l}}} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_{\mathfrak{l}}} = 1, \dots, v_{\zeta_{\mathfrak{l}}}, \quad \zeta_{\mathfrak{l}} = 1, \dots, \epsilon_{\mathfrak{l}}, \quad \mathfrak{l} = 1, \dots, \vartheta,$$

с кратностями  $\varkappa_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} v_{\zeta_l}$ ,  $l = 1, \dots, \vartheta$ , и условные частные интегралы  $(\exp s_\tau, S_\tau)$ ,  $\tau = 1, \dots, t$ . Тогда, например, имеет место следующее утверждение

**Теорема** (критерий существования первого интеграла типа Дарбу). *Для того, чтобы полиномиальная система уравнений с частными производными первого порядка (1) имела на области  $G \subset \mathbb{R}^n$  первый интеграл типа Дарбу*

$$F: x \rightarrow \prod_{k=1}^{\theta+r} w_k^{\alpha_k}(x) \prod_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} (\operatorname{Re}^2 \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x) + \operatorname{Im}^2 \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x))^{\gamma_{\mathfrak{k}}} \cdot$$

$$\cdot \exp \left( \sum_{l=1}^{\theta} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\delta_{\xi_l}} \alpha_{l,h_{\xi_l} g_{\xi_l}} K_{l,h_{\xi_l} g_{\xi_l}}(x) + \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x)}{\operatorname{Re} \mathfrak{m}_{\mathfrak{k}}(x)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\vartheta} \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{v_{\zeta_l}} \left( \varphi_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) + \psi_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(x) \right) + \sum_{\tau=1}^t \beta_{\tau} s_{\tau}(x) \right) \quad \forall x \in G$$

необходимо и достаточно существования вещественных постоянных

$\alpha_k, k=1, \dots, \theta+r$ ,  $\alpha_{l,h_{\xi_l} g_{\xi_l}}, h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, g_{\xi_l}=1, \dots, \delta_{\xi_l}, \xi_l=1, \dots, \varepsilon_l, l=1, \dots, \theta$ ,  $\gamma_{\mathfrak{k}}, \eta_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{k}=1, \dots, \vartheta+\mathfrak{r}$ ,

$\varphi_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, \psi_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}, h_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, g_{\zeta_l}=1, \dots, v_{\zeta_l}, \zeta_l=1, \dots, \epsilon_l, l=1, \dots, \vartheta$ ,  $\beta_{\tau}, \tau=1, \dots, t$ ,

таких, что выполняется система тождеств

$$\sum_{k=1}^{\theta+r} \alpha_k W_{kj}(x) + 2 \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} \gamma_{\mathfrak{k}} \operatorname{Re} \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}j}(x) + \sum_{l=1}^{\theta} \sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l} \sum_{g_{\xi_l}=1}^{\delta_{\xi_l}} \alpha_{l,h_{\xi_l} g_{\xi_l}} Q_{l,h_{\xi_l} g_{\xi_l},j}(x) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{k}=1}^{\vartheta+\mathfrak{r}} \eta_{\mathfrak{k}} \operatorname{Im} \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}j}(x) + \sum_{l=1}^{\vartheta} \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{v_{\zeta_l}} \varphi_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{Q}_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l},j}(x) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\vartheta} \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{v_{\zeta_l}} \psi_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{Q}_{l,h_{\zeta_l} g_{\zeta_l},j}(x) + \sum_{\tau=1}^t \beta_{\tau} S_{\tau j}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1 \dots, m.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф25КИ-087 от 06.02.2025.

### Литература

1. Darboux, G. Mémoire sur les équations différentielles algebriques du premier ordre et du premier degré / G. Darboux // Bull. des Sciences Math. – 1878. – Vol. 2. – P. 60–96, 123–144, 151–200.
2. Goriely, A. Integrability and nonintegrability of dynamical systems / A. Goriely. – World Scientific : Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. – Vol. 19. – 436 p.
3. Горбузов, В. Н. Интегралы дифференциальных систем / В. Н. Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 447 с.
4. Проневич, А. Ф. Интегралы якобиевых систем уравнений в частных производных / А. Ф. Проневич. – Saarbruchen : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 97 с.

5. Zhang, X. Integrability of dynamical systems: algebra and analysis / X. Zhang. – Singapore : Springer, 2017. – 380 p.

6. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

7. Буслюк, Д. В. Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных / Д. В. Буслюк // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 418–419.

## О РЕШЕНИИ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$ -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.В. Рогозин, М.В. Дубатовская

Пусть  $\Gamma$  – простая замкнутая гладкая кривая, которая делит расширенную комплексную плоскость  $\overline{\mathbb{C}}$  на две области  $D^+ \ni \{0\}$  и  $D^- \ni \{\infty\}$ . Задача  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (или  $\mathbb{R}$ -линейная краевая задача, или задача Маркушевича) заключается в нахождении двух функций  $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$ , аналитических в  $D^+, D^-$  соответственно, удовлетворяющих следующему краевому условию

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

Иное название этой задачи связано со статьей А.И. Маркушевича [1], в которой изучен вырожденный случай задачи (1).

Задача  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения имеет долгую историю. Это связано в основном с ее многочисленными приложениями (см. исторический обзор [2]). В частности, эта задача описывает потенциальный тепловой поток в  $2D$ -композиционных материалах (см., например, [2-4]), а также применяется для изучения задач теории оболочек (см., например, [5]).

В настоящей работе обсуждается разрешимость векторно-матричной задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения на единичной окружности  $\mathbb{T}$  с рациональными коэффициентами

$$\Phi^+(t) = A(t)\Phi^-(t) + B(t)\overline{\Phi^-(t)} + F(t), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

где  $A(t), B(t)$  – заданные  $2 \times 2$  рациональные матрицы (причем  $A(t)$  – не вырождена на единичной окружности),  $F(t)$  – заданный рациональный вектор второго порядка,  $\Phi(z)$  – искомый кусочно-аналитический вектор.

Поскольку на единичной окружности выполняется равенство  $t = \frac{1}{\bar{t}}$ , то при переходе в (1) к сопряженным величинам получаем второе краевое условие (равносильное исходному)

$$\overline{\Phi^+(\frac{1}{\bar{t}})} = \overline{A(t)\Phi^-(\frac{1}{\bar{t}})} + \overline{B(t)\Phi^-(t) + F(t)}, \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2)$$

Введем новые неизвестные векторы 4 порядка

$$\Psi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi^+(z) \\ \Phi^-(\frac{1}{\bar{z}}) \end{pmatrix}, \quad \Psi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi^-(z) \\ \Phi^+(\frac{1}{\bar{z}}) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В этих терминах система (1)-(2) переписывается в следующей эквивалентной форме

$$\begin{cases} \Psi_1^+(t) &= A(t)\Psi_1^-(t) + B(t)\Psi_2^+(t) + F(t), \\ \overline{A(t)\Psi_2^+(t)} &= -\overline{A(t)\Psi_1^-(t)} + \Psi_2^-(t) - \overline{F(t)}. \end{cases}$$

Исключив из первого условия  $\Psi_2^+(t)$ , приходим к следующей векторно-матричной краевой задаче Римана (или задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения, см. [6])

$$\Psi^+(t) = G(t)\Psi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (4)$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} A(t) - B(t)(\overline{A(t)})^{-1}\overline{B(t)} & B(t)(\overline{A(t)})^{-1} \\ -(\overline{A(t)})^{-1}\overline{B(t)} & (\overline{A(t)})^{-1} \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} F(t) - (\overline{A(t)})^{-1}\overline{F(t)} \\ -\overline{F(t)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Предположим дополнительно, что  $4 \times 4$  рациональная матрица  $G(t)$  не вырождена на единичной окружности. Это условие, вообще говоря, трудно проверяемо, но, например, если матрицы  $(\overline{A(t)})^{-1}$  и  $B(t)$  коммутируют, то  $\det G(t) = 1$ . При выполнении данного условия решение задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1) эквивалентно сводится к факторизации матричного коэффициента  $G(t)$  векторно-матричной задачи (4) (см., например, [7, 8]), последнее означает представление матрицы  $G(t)$  в следующем виде  $G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t)$ , где  $G^+(t)$ ,  $G^-(t)$  – невырожденные квадратные матрицы-функции, аналитически продолжимые вместе со своими обратными  $[G^+(t)]^{-1}$ ,  $[G^-(t)]^{-1}$  в области  $D^+ = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  соответственно, и  $\Lambda(t) = \text{diag}\{t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}, t^{\alpha_3}, t^{\alpha_4}\}$  с целыми числами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . Числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  называют частными индексами факторизации (6) или частными индексами матрицы  $G(t)$ .

Построение факторизации осуществляется в два этапа.

1. Применяя метод Г. Н. Чеботарева [9], матрица  $G(t)$  преобразуется к треугольной форме (не меняя при этом ее определителя).

2. Факторизация треугольной матрицы строится по индукции, используя результат работы [10, Lemma 1].

Работа выполнена при частичной поддержке ГПНИ «Конвергенция-2030».

### Литература

1. Маркушевич, А. И. Об одной краевой задаче теории аналитических функций / А. И. Маркушевич // Уч. зап. Московского ун-та. – 1946. – Т. 1, № 100. – С. 20–30.
2. Mityushev, V. V.  $\mathbb{R}$ -linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains / V. V. Mityushev – In: Rogosin S.V., Koroleva A.A. (Eds.) *Advances in Applied Analysis. Ser.: Trends in Mathematics.* – Basel: Birkhäuser, 2012. – P. 147–176.
3. Drygaś, P., Gluzman, S., Mityushev, V., Nawalaniec, W. *Applied Analysis of Composite Media: Analytical and Computational Results for Materials Scientists and Engineers. Ser.: Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering* / P. Drygaś, S. Gluzman, V. Mityushev, W. Nawalaniec. – Cambridge, Woodhead Publ., 2019. – 372 p.
4. Mityushev, V. V., Rogosin, S. V. *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications. Ser.: Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 108.* / V. V. Mityushev, S. V. Rogosin. – Boca Raton, FL, London, New York, NY, Washington, DC: Chapman & Hall/CRC, 1999. – 296 p.
5. Векуа, И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И. Н. Векуа. – Москва: Наука, 1982. – 286 с.
6. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – 3-е изд. – Москва: Наука, 1968. – 512 с.
7. Litvinchuk, G. S., Spitkovskii, I. M. *Factorization of Measurable Matrix Functions. Ser.: Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 25.* / G. S. Litvinchuk, I. M. Spitkovskii. – Basel, Birkhäuser, 1987. – 372 p.

8. Rogosin, S. V., Mishuris, G. Constructive methods for factorization of matrix-functions / S. V. Rogosin, G. Mishuris // IMA J. Appl. Math. – 2016. – Vol. 81, no. 2. – P. 365–391.

9. Чеботарев, Г. Н. Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка / Г. Н. Чеботарев // Усп. мат. наук. – 1956. – Т. 11, № 3 (69). – С. 192–202.

10. Primachuk, L., Rogosin, S. V. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order / L. Primachuk, S. V. Rogosin // Lobachevskii J. Math. – 2018. – Vol. 39, no. 6. – P. 809–817.

## КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

М.Х. Рузиев, Г.О. Сарсенбаева

Краевые задачи для эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом, линия вырождения которого лежит внутри области, изучены сравнительно мало. В работе [1] рассмотрена простейшая обобщенная задача Дирихле для эллиптического уравнения, линия вырождения которого лежит внутри ограниченной области. В данной работе, доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле в полуплоскости для уравнения эллиптического типа с сингулярным коэффициентом, линия вырождения которого лежит внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \quad (1)$$

в области  $D = D^+ \cup D^- \cup I$ , где  $D^+ = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ ,  $D^- = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$ ,  $I = \{(x, y) : x > 0, y = 0\}$ . В уравнении (1)  $m, \beta_0$  – некоторые действительные числа удовлетворяющие условиям  $m > 0, -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ .

В области для уравнения (1) изучим следующую краевую задачу.

**Задача D.** Найти в области  $D$  функцию  $u = u(x, y)$  со свойствами:

1.  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$  и удовлетворяет уравнению (1) в  $D^+ \cup D^-$ ;

2.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} |y|^{m+2},$$

$$x > 0, \quad y \in (-\infty, \infty);$$

3.  $u = u(x, y)$  удовлетворяет краевому условию

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y \in (-\infty, +\infty)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in (0, \infty)$$

причем эти пределы при  $x = 0, x = \infty$  могут иметь особенности порядка ниже  $1 - 2\beta$ , где  $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$ ,

$$\varphi(y) = \begin{cases} \varphi^+(y), & y \in (0, \infty), \\ \varphi^-(y), & y \in (-\infty, 0), \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

и

$$\varphi^+(y) \in C[0, \infty), \quad \varphi^-(y) \in C(-\infty, 0], \quad \varphi^+(0) = \varphi^-(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

**Теорема.** Пусть выполнены условия

$$y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi^+(y) \in L_1(0, \infty), \quad (-y)^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi^-(y) \in L_1(-\infty, 0).$$

Тогда задача  $D$  однозначно разрешима.

Для доказательства теоремы прежде всего запишем решение уравнения (1) в области  $D^+$  и  $D^-$  [2]. Затем, доказательство теоремы проводится методом интегральных уравнений. Задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения и его решение методом Карлемана-Векуа [3] находится в явном виде.

### Литература

1. Mirsaburov M. n a Generalization of the Dirichlet and Holmgren Problems for a Degenerating Elliptic Equation // Uzbek Mathematical Journal. – 1998. – Vol. 4. – P. 46–50.
2. Ruziev M., Yuldasheva N. On a boundary value problem for the Gellerstedt equation with a singular coefficient // Russian Math. – 2024. – Vol. 68. – P. 57–69.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – Москва, 1969. – 599 с.

## ОБ АСИМПТОТИКЕ СХОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ЧЕБЫШЁВА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко

Рассмотрим систему  $\mathbf{F}_\gamma = \mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}) = \{F_\gamma(z; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ , состоящую из вырожденных гипергеометрических функций (функций Миттаг–Леффлера; подробнее см. [1,2])

$$F_\gamma(z; \lambda_j) = {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где параметр  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-, \mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $(\gamma)_0 = 1$ ,  $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$  – символ Похгаммера, а  $\vec{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – набор не равных нулю различных комплексных чисел (при  $k = 1$  считаем, что  $\lambda_1 = 1$ ). Рассмотрим также систему  $\mathbf{Ch}_\gamma = \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}) = \{Ch_\gamma(x; \lambda_j)\}_{j=1}^k$ , состоящую из функций, представленных рядами Фурье по многочленам Чебышёва  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$$Ch_\gamma(x; \lambda_j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} T_p(x), \quad j = 1, \dots, k.$$

При  $k \geq 1$  и  $n \geq m_j - 1, j = 1, \dots, k$ , существуют [3,4] рациональные дроби

$$\pi_j^{ch}(z; \mathbf{Ch}_\gamma) = \pi_j^{ch}(z; \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})) = \pi_{n_j, n, m}^{ch}(z; \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})) = \frac{P_j^{ch}(z; \mathbf{Ch}_\gamma)}{Q_m^{ch}(z; \mathbf{Ch}_\gamma)},$$

где многочлены  $Q_m^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma) = Q_{n, \vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))$ ,  $P_j^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma) = P_{n_j, n, \vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))$ , степени которых не превышают соответственно  $m$  и  $n_j$ , подобраны так, что

$$Ch_\gamma(x; \lambda_j) - \pi_j^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} c_l^j T_l(x), \quad j = 1, \dots, k.$$

Как и в [3,4] координатные функции вектора  $\vec{\pi}_{n,\vec{m}}^{ch}(\mathbf{Ch}_\gamma) = \{\pi_j^{ch}(z; \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))\}_{j=1}^k$  будем называть *нелинейными аппроксимациями Эрмита–Чебышёва* для мультииндекса  $(n, \vec{m})$  и системы  $\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})$ . При  $k = 1$  дроби  $\pi_{n,m}^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma) := \pi_{n,n,\vec{m}}^{ch}(x; \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))$  называют *нелинейными аппроксимациями Паде–Чебышёва* (см.[6]). Пусть  $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$  – корни уравнения  $\lambda^k = 1$ , т.е.

$$\lambda_j = e^{i \frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где  $i$  – мнимая единица. Полагаем  $\varphi(x) := x(1 - x^k)$ . Через  $x_j$  обозначим нули  $\varphi'(x)$ :

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} e^{i \frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Будем рассматривать случай, когда  $k = 2$ , в этом случае  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Рассмотрим функцию  $S(x) := \ln \varphi(x)$ ,  $x \in (0, 1)$ . По определению полагаем, что  $S(0) = S(1) = -\infty$ . Справедливы равенства [5]

$$S(x_1) = \ln \frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}, \quad S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad S''(x) = \frac{\varphi''(x) \varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)},$$

из которых следует, что

$$S'(x_1) = 0, \quad S''(x_1) = \frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} = -\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}},$$

и

$$B_k(n) := \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}} \left( \frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}} \right)^n.$$

**Теорема 1.** Если  $k = 2$ , то для любого  $x$ ,  $n = m_1 = m_2$  при  $n \rightarrow \infty$

$$Ch_\gamma(x; 1) - \pi_1^{ch}(x; Ch_\gamma) = (-1)^n \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \frac{1}{(\gamma)_{3n}} \left( \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{i(3n+1) \arccos x} e^{(1-\frac{\sqrt{3}}{3})(x+i\sqrt{1-x^2})} (1 + O(1/n)) \right\}, \quad (2)$$

$$Ch_\gamma(x; -1) - \pi_2^{ch}(x; Ch_\gamma) = (-1)^n \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \frac{1}{(\gamma)_{3n}} \left( \frac{2}{3\sqrt{3}} \right)^n \cdot \operatorname{Re} \left\{ (-1)^{n+1} e^{i(3n+1) \arccos x} e^{(-1-\frac{\sqrt{3}}{3})(x+i\sqrt{1-x^2})} (1 + O(1/n)) \right\}. \quad (3)$$

**Следствие 1.** Пусть  $k = 1$ . Тогда при  $n = m$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\|Ch_\gamma(x; 1) - \pi_{n,n}^{ch}(x; Ch_\gamma)\|_1 \asymp \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} \frac{1}{|(\gamma)_{2n}|}. \quad (4)$$

Здесь и далее  $\|f(x)\|_1 = \max\{|f(x)|: x \in [-1, 1]\}$ .

**Следствие 2.** Пусть  $k=2$ . Тогда при  $n = m_1 = m_2$  и  $n \rightarrow \infty$

$$\|Ch_\gamma(x; \pm 1) - \pi_{n,m}^{ch}(x; Ch_\gamma)\|_1 \asymp \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{e^{1-1/\sqrt{3}}}{|(\gamma)_{3n}|}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

### Литература

1. Mittag-Leffler, M.G. Sur la nouvelle fonction  $E(x)$  / M. G. Mittag-Leffler // C.R. Akad. Sci.Paris – 1903. – Vol. 7137. – P. 554–558.
2. Джрбашян, М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. – М.: Наука, 1966.
3. Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва / А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко, Т. М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Матем. Информ. – 2023. – № 2. – С. 6–17.
4. Старовойтов А. П., Кругликов И. В., Оснач Т. М. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита-Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва // Журнал Белорусского государственного университета. Матем. Информ. – 2024. – № 3. – С. 6–21.
5. Старовойтов, А. П. Аппроксимации Эрмита–Паде функций Миттаг–Леффлера / А. П. Старовойтов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.
6. Суетин, С.П. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций / С. П. Суетин // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.

## ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ ГРАНИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ТИПА ХАРДИ

Б.А. Худайкулиев

Исследование начально-краевых задач полулинейных и линейных уравнений теплопроводности с потенциалами  $V(x)$ , обладающими сингулярностью в  $L^1_{\text{loc}}$ , занимает центральное место в теории операторов. Ключевым вопросом является нахождение критического порога константы потенциала, при котором происходит качественный переход: от существования глобального во времени неотрицательного решения к явлению “мгновенного разрушения” (instantaneous blow-up). В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с потенциалом, имеющим сингулярность второго порядка на границе области. Основное внимание уделяется критическому значению константы потенциала  $c = \frac{1}{4}$ , определяющему бифуркацию между существованием глобального во времени решения и явлением мгновенного взрыва (instantaneous blow-up). Результаты имеют важное значение для квантовой механики (устойчивость гамильтонианов) и теории диффузионных процессов с усилением на границе.

В работе [1] показано, что существование неотрицательного обобщенного решения задачи (1) – (3) эквивалентно существованию положительного суперрешения стационарного (эллиптического) уравнения  $\Delta u - V(x)u = 0$ . Задача (1)-(3) изучена также в работах [2] – [4].

Пусть  $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) — единичный шар с центром в начале координат. В цилиндре  $Q = B \times (0, T)$  рассмотрим задачу нахождения неотрицательной функции  $u(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - V(x)u = 0, \quad (x, t) \in B \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial B \times (0, T), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in B, \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа и  $T > 0$ .

Предполагается, что  $0 \leq V \in L^1_{\text{loc}}(B)$  и  $0 \leq u_0(x) \in L^1(B)$ .

Условие (3) выполняется в смысле

$$\text{ess} \lim_{t \rightarrow +0} \int_B u(x, t) \psi(x) dx = \int_B u_0(x) \psi(x) dx$$

при любой  $\psi \in D(B)$ .

**Определение.** Пусть  $Q = B \times (0, T)$ . Функция  $u(x, t)$  называется неотрицательным обобщенным решением рассматриваемой задачи в смысле распределений, если

$$u \in L^1_{\text{loc}}(Q), \quad Vu \in L^1_{\text{loc}}(Q),$$

и для любой функции  $\psi \in C^\infty(\bar{Q})$ , такой что  $\psi(x, T) = 0$  и  $\psi|_{\partial B} = 0$ , выполняется интегральное тождество:

$$\int_Q u(\psi_t - \Delta \psi - V(x)\psi) dx dt = \int_B u_0(x) \psi(x, 0) dx.$$

Пусть

$$V_0(x) = \frac{c}{(1 - |x|)^2}, \quad x \in B.$$

Найдем радиальную функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\Delta \varphi + V_0(x)\varphi = 0$$

в смысле распределений.

Переходя к сферическим координатам, получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{c}{(1-r)^2} \varphi = 0.$$

Решая это уравнение, находим функцию  $\varphi(r)$ :

$$\varphi(r) = (1-r)^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4c})} F(\alpha, \beta, 1+\alpha+\beta-\gamma; 1-r).$$

Здесь  $F$  — гипергеометрическая функция, где

$$\gamma = n-1, \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( n-1 - \sqrt{1-4c} + \sqrt{(n-2)^2 - 4c} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left( n-1 - \sqrt{1-4c} - \sqrt{(n-2)^2 - 4c} \right).$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема:

**Теорема.**

1. Если  $0 \leq c \leq \frac{1}{4}$  и  $0 \leq V(x) \leq V_0(x)$  в шаре  $B$ , то задача (1)-(3) имеет неотрицательное обобщенное решение при любой неотрицательной начальной функции  $u_0 \in L^1(B)$ .
2. Если  $c > \frac{1}{4}$  и  $V(x) \geq V_0(x)$  в шаре  $B$ , то задача (1)-(3) не имеет неотрицательных решений, кроме нулевого.

### Литература

1. P. Baras, J.A. Goldstein, "The heat equation with a singular potential", Trans. Amer. Math. Soc., 1984, Vol. 284, No. 1, pp. 121–139.
2. X. Cabre, Y. Martel, "Existence versus explosion of instantaneous solutions for linear heat equations with singular potentials", Communications in Partial Differential Equations, 1999, Vol. 329, pp. 973–978.
3. Б.А. Худайкулиев, "Уравнение теплопроводности с сингулярным потенциалом", Дифференциальные уравнения, 1997, Т. 33, № 4, с. 567–569.
4. В. Hudaýkuliev, "On a nonnegative solutions of the heat equation with singular potential in the conical domain", TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 1, No. 2, Baku, 2010, pp. 225–236.

## ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ОДНОЙ ФУНКЦИИ С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ТАНГЕНСОМ

Ф.Г. Хуштова

Методы интегральных преобразований остаются одними из наиболее эффективных методов решения различных линейных дифференциальных и интегральных уравнений, возникающих в прикладных задачах математики, математической физики, механики и других областях науки. Наличие большого количества таблиц и справочников по интегральным преобразованиям значительно упрощает процесс нахождения решения исследуемых задач. Применение теоремы о вычетах и важных теорем теории функций комплексного переменного помогают в случаях, если функция, прообраз которой нужно вычислить, не имеется в современных таблицах и справочниках по интегральным преобразованиям. При решении операционными методами задач для уравнения теплопроводности важное место занимает преобразование Лапласа. В данной работе рассмотрим обращение преобразования Лапласа, в ядре которой стоит функция, возникающая при решении краевой задачи с условиями третьего рода для уравнения теплопроводности [1].

Рассмотрим контурный интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \bar{E}(s) ds, \quad \gamma > 0,$$

где  $\bar{E}(s) = \frac{\sqrt{s}}{(s+ab) \operatorname{th} \sqrt{s}l + (a+b)\sqrt{s}}$ ,  $a$ ,  $b$  и  $l$  – некоторые параметры,  $t > 0$ .

**Вспомогательные функции.** Пусть  $L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , – полиномы Лагерра [2, с. 188], [3, с. 100],

$$\chi(\tau, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}.$$

**Основной результат.** В данной работе доказано утверждение, представляющее собой обращение преобразования Лапласа функции  $\bar{E}(s)$ , выраженное в двух формах, пригодных для больших и малых значений времени.

**Утверждение.** Пусть  $a, b \geq 0, l > 0$ . Тогда обратное преобразование Лапласа функции  $\bar{E}(s)$  может быть записано в эквивалентных формах

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 t},$$

где

$$c_n = \frac{2 \lambda_n^2 (\lambda_n^2 - ab)}{l (\lambda_n^2 + a^2) (\lambda_n^2 + b^2) + (a + b) (\lambda_n^2 + ab)},$$

$\lambda_n$  – положительные корни трансцендентного уравнения  $\operatorname{ctg} \lambda l = (\lambda - ab/\lambda)/(a + b)$ , и

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) * E_n(a, t) * E_n(b, t),$$

где  $T_n(t) = \chi(2ln, t) + \chi(2ln + 2l, t)$ ,  $E_n(h, t) = \int_0^{\infty} e^{-h\tau} L_n(2h\tau) \chi'_t(\tau, t) d\tau$ .

### Литература

1. Ремизова, О. И. Операционный метод построения функций Грина для малых времен, соответствующих решению краевых задач для уравнений переноса параболического типа / О. И. Ремизова, М. Л. Соснин // Вестник МИХТ им. М. В. Ломоносова. – 2011. – Т. 6, № 3. – С. 116–119.
2. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1966. – 296 с.
3. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – М.: Физматлит, 1963. – 360 с.

## НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Е.С. Чеб

В работе рассматривается корректно поставленная начально-краевая задача для линейного уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами и одной кратной характеристикой. На боковой границе задано нелокальное интегральное условие. Методом характеристик построено в явном виде единственное классическое решение при выполнении условий согласования начальных и граничных условий. Смешанные задачи для волнового уравнения в полуполосе с интегральным условием рассматривались в работе [1], где предполагалось наличие двух несовпадающих характеристик. Подход к построению классического решения для нестрого гиперболических уравнений с локальными граничными условиями рассмотрен в работах [2, 3].

Рассмотрим нестрого гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} + a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in Q_n, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

Добавим к уравнению (1) граничные условия вида

$$u(t, x)\Big|_{x=0} + \int_0^t \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x}\Big|_{x=0} d\tau = \mu_1(t), \quad t \in [t_0, t_{n+1}], \quad (3)$$

$$u(t, x)\Big|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \in [t_1, t_{n+1}]. \quad (4)$$

Здесь  $Q_n = \cup_{k=0}^n G_k$ ,  $G_0 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq at, x \in [0, l], t \in [0, t_1]\}$ ,  $G_k = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : (k-1)l \leq at - x \leq kl, x \in [0, l], t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]\}$ ,  $t_k = kl/a$ ,  $k = \overline{0, n}$ .

Обратим внимание, что условие (4) задаётся не на всей границе  $x = 0$ , а только на части. Выбор таких граничных условий гарантирует корректность по Адамару задачи (1)–(4) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(t, x) = g_1(x - at) + t g_2(x - at), \quad (5)$$

где  $g_1, g_2$  – любые функции из  $C^2(\mathbb{R})$  аргумента  $x - at$ , функции  $g_i : (-\infty, l) \rightarrow g_i(y) \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Требуется определить общий вид функций  $g_i$  ( $i = 1, 2$ ) в представлении (5) при условии, что будут выполняться начальные (2) и граничные условия (3), (4).

В треугольнике  $G_0$  решается начальная задача, из которой определяются

$$g_1^{(0)}(z) = \varphi(z), \quad g_2^{(0)}(z) = \psi(z) + a\varphi(z), \quad z \in [0, l]. \quad (6)$$

В областях  $G_k$  для определения функций  $g_1, g_2$  решается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим область  $G_1$ . Удовлетворяя (5) граничным условия слева, после дифференцирования по  $t$  и замены переменной, получаем уравнение вида

$$(1 - a)g_1'(z) + z\left(1 - \frac{1}{a}\right)g_2'(z) + g_2(z) = -a\mu_1\left(-\frac{z}{a}\right), \quad z \in [-l, 0].$$

Аналогично, удовлетворяя (5) граничным условия справа, после замены переменной, получаем уравнение вида

$$g_1^{(1)}(z) = \frac{z-l}{a}g_2^{(1)}(z) + \mu_2\left(-\frac{z-l}{a}\right), \quad z \in [-l, 0]. \quad (7)$$

Таким образом, функция  $g_2^{(1)}(z), z \in [-l, 0]$ , определяется из решения задачи Коши

$$g_2'(z) - bg_2(z) = f(z), \quad g_2(0) = C = \frac{a}{l}\left(\mu_2\left(\frac{l}{a}\right) - \mu_1(0)\right),$$

где

$$b = \frac{1}{l(1-a)}, \quad a \neq 1, \quad f(z) = a^2 b \mu_1'\left(\frac{l}{a}\right) + \frac{1}{l} \mu_2'\left(-\frac{z-l}{a}\right).$$

$$g_2^{(1)}(z) = e^{bz}\left(C + \int_0^z e^{-b\tau} f(\tau) d\tau\right), \quad z \in [-l, 0]. \quad (8)$$

В остальных областях  $G_k$  все происходит аналогично в случае исходного однородного уравнения. Если в уравнении присутствует правая часть  $f(t, x)$ , то в (5) добавляется слагаемое  $F_0(t, x)$ ,  $F_0(t, x) = \int_0^t (t - \tau) f(\tau, |x - a(t - \tau)|) d\tau$ , которое влияет на расчёт функций  $g_1, g_2$  в каждой из областей  $G_k$ .

**Теорема.** Задача (1)–(4) на  $Q_n$  имеет единственное классическое решение  $u \in C^2(Q_n)$  вида (5), причём в треугольнике  $G_0$  функции  $g_1, g_2$  определяются по формуле (6), а на  $G_k$  – формулами (7) – (8) при выполнении условий гладкости на заданные функции  $\varphi \in C^{(3)}[0, l]$ ,  $\psi \in C^{(2)}[0, l]$ ,  $\mu_1 \in C^{(2)}[0, t_{k+1}]$ ,  $\mu_2 \in C^{(2)}[t_1, t_{k+1}]$ , условий согласования  $\varphi(0) = \mu_1(0)$ ,

$$\frac{a}{1-a}\mu'_1(0) = -\frac{1}{1-a}(\psi(0) + \varphi'(0)), \quad \frac{1}{1-a}\mu''_1(0) = \frac{a}{1-a}\varphi''(0) - \frac{1-2a}{a(1-a)}\psi'(0),$$

$$\frac{1}{l}\mu'_2\left(\frac{l}{a}\right) = \frac{1}{l}\psi(0) - (\psi'(0) + a\varphi''(0)), \quad \frac{1}{al}\mu''_2\left(\frac{l}{a}\right) = \psi''(0) + a\varphi^{(3)}(0) - \frac{1}{l(1-a)}(\psi'(0) + a\varphi''(0)).$$

### Литература

1. Моисеев, Е. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения / Е. И. Моисеев, В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.
2. Чеб, Е. С. О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой / Е. С. Чеб, Е. С. Симинская // Вестник БелГУ. Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т. 1, № 1. – С. 11–18.
3. Чеб, Е. С. Классическое решение граничной задачи для уравнения четвёртого порядка с младшей производной и одной кратной характеристикой // Труды 10-го Междунар. науч. семинара AMADE–2021. – БГУ: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 127–132.

## ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин

Обозначим через  $K_x(P)$  ядро симметрической билинейной формы

$$\mathcal{B}_x(\eta, \xi) = \sum_{k,l=1}^n a_{k,l}(x) \eta_k \xi_l,$$

индуцированной старшим символом  $p_2(x, \xi)$  дифференциального оператора

$$P = \sum_{k,j=1}^n a_{k,j}(x) D_k D_j + \sum_{k=1}^n a_k(x) D_k + a_0(x), \quad D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (1)$$

определенного в открытом множестве  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , коэффициенты которого являются вещественнозначными, вещественно аналитическими функциями ( $a_{k,j}(x) = a_{j,k}(x)$ ). Поскольку  $p_2(x, \xi) = \mathcal{B}_x(\xi, \xi)$ , то в каждой точке  $x \in \Omega$

$$(x, K_x(P) \setminus \{0\}) \subset \text{Char}(P) \stackrel{\text{опр}}{=} \{(x, \xi) \mid p_2(x, \xi) = 0, \xi \neq 0\}.$$

**Теорема 1.** Пусть  $x \in \Omega$  и  $B_x(\eta, \xi) \neq 0$ . Следующие условия равносильны

- а)  $\{\xi \mid (x, \xi) \in \text{Char}(P)\} = K_x(P) \setminus \{0\}$ ;
- б) форма  $B_x(\xi, \xi)$  не строго знакоопределена;
- в)  $\mathcal{T}_x(P) \stackrel{\text{опр}}{=} \{\tau \mid \tau(\xi) = 0, \text{ если } (x, \xi) \in \text{Char}(P)\} \neq \{0\}$ .

Предположим, что

- (1) ранг матрицы  $(a_{k,j}(x))_{k,j=1}^n$  не зависит от точки  $x \in \Omega$ .

В этом случае множество  $L(P) = \cup_{x \in \Omega} (x, \mathcal{T}_x(P))$  образует подрасслоение в касательном расслоении  $T\Omega$ . Через  $\mathcal{L}(P)$  обозначим дифференциальную систему, порожденную  $L(P)$ . Дифференциальная система  $\mathcal{L}(P)$  порождает в  $C^\infty$ -модуле  $\mathcal{T}\Omega$  сечений касательно-го расслоения фильтрацию  $C^\infty$ -подмодулей  $\mathcal{H}^j$ , в которой первый элемент  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$ , а последующие подмодули  $\mathcal{H}^{j+1}$  порождаются векторными полями из  $\mathcal{L}(P)$  и коммутаторами векторных полей вида  $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$ . Если  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^2$ , то дифференциальную систему  $\mathcal{L}(P)$  называют голономной. Предположим, что

- (2) найдется такое натуральное число  $r$ , что

$$\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}^1 \subsetneq \mathcal{H}^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{H}^r = \mathcal{H}^{r+1},$$

причем размерность  $\dim \mathcal{H}_x^r$  не зависит от точки  $x \in \Omega$ .

В этом случае подмодуль  $\mathcal{H}^r$  является голономной дифференциальной системой и в силу теоремы Фробениуса через каждую точку  $x^0 \in \Omega$  проходит максимальное связное интегральное подмногообразие  $M_{\mathcal{H}^r, x^0}$ . Говорят, что ростки функций  $u^1(x)$  и  $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$  равны в точке  $x^0 \in \Omega$  и пишут  $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$ , если  $u^1(x) = u^2(x)$  в некоторой открытой окрестности точки  $x^0$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $P$  вида (1) удовлетворяет равносильным условиям предположения 1 и условиям (а) и (б). Тогда, если коэффициенты оператора являются вещественно аналитическими функциями, то из равенства ростков  $u_{x^0}^1 \cong u_{x^0}^2$  в точке  $x^0 \in \Omega$  следует равенство  $u_x^1 \cong u_x^2$  в точках связной компоненты множества  $M_{\mathcal{H}^r, x^0} \cap \{y \in \Omega \mid (Pu^1)_y \cong (Pu^2)_y\}$ , содержащей  $x^0$ .

Теоремы о продолжении решений линейных уравнений высокого порядка с вещественно аналитическими коэффициентами опубликованы в статье [1]. Если коэффициенты уравнения не являются аналитическими функциями, то утверждение теоремы, вообще говоря, не верно. В [2] построен пример такого уравнения. Дифференциальная система  $\mathcal{L}(P)$  определяемая главным символом оператора

$$L = D_{x_1}^2 + (D_{x_2} - x_1 D_{x_3})^2 - D_{x_3} + d(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

порождается векторными полями  $X^1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  и  $X^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Поскольку коммутатор  $[X^1, X^2] = -\frac{\partial}{\partial x_3}$  и  $\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^2 = \mathcal{T}\mathbb{R}^3$ , то дифференциальная система  $\mathcal{L}(P)$ , индуцированная главным символом, является вполне не голономной. Из теоремы 2 следует, что равенство нулю ростка решения уравнения  $Lu = 0$  в некоторой точке влечет равенство  $u = 0$  во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , если коэффициент  $d(x)$  является вещественно аналитической функцией. Если последнее условие нарушено, то утверждение не верно. Точнее

**Теорема 3.** Существует коэффициент  $d(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , такой, что уравнение  $Lu = 0$  имеет нетривиальное решение  $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , равное нулю при  $x_1 \leq 0$ , носитель которого содержит гиперплоскость  $x_1 = 0$ .

## Литература

1. Шананин, Н. А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н. А. Шананин // Матем. заметки. – 2022. – Т. 111, № 6. – С. 921–928.
2. Шананин, Н. А. К продолжению ростков решений / Н. А. Шананин // Матем. заметки. – 2024. – Т. 115, № 4. – С. 619–625.

## ЭКРАНИРОВАНИЕ НИЗКОЧАСТОТНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОНКИМ СФЕРИЧЕСКИМ КОЛЬЦОМ

Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич

Пусть в однородном и изотропном пространстве  $R^3$  с магнитной проницаемостью среды  $\mu$  находится идеально тонкий сферический экран  $S$ , который расположен на поверхности сферы  $\Gamma$  радиуса  $a$  с центром в точке  $O$ . Для решения задачи с точкой  $O$  свяжем сферические координаты  $\{r, \theta, \varphi\}$ :

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , тогда поверхность экрана  $S$  описывается следующим образом:

$$S = \{r = a, \quad 0 < \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Разобьем все пространство  $R^3$  поверхностью  $\Gamma$  на две области:  $D_1$  ( $r < a$ ) и  $D_2$  ( $r > a$ ).

Пусть в точке  $O$  находится низкочастотный магнитный диполь, момент которого направлен вдоль оси  $Oz$ . В квазистационарном приближении система векторных уравнений Максвелла сводится к нахождению вторичного скалярного магнитного потенциала  $U_j$ , удовлетворяющего уравнению Лапласа  $\Delta U_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , в области  $D_j$  [1]. Магнитный потенциал исходного поля  $U_0$  представим через сферические гармонические функции [2].

При взаимодействии первичного магнитного поля с экраном  $S$  в области  $D_1$ , образуется отраженное вторичное магнитное поле с потенциалом  $U_1$ , области  $D_2$  – с потенциалом  $U_2$ .

Постановка задачи. Требуется найти вторичные потенциалы  $U_j$ ,  $j = 1, 2$ , которые удовлетворяют уравнению Лапласа  $\Delta U_j = 0$ ,  $j = 1, 2$ , граничному условию на поверхности сферического экрана  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}} (U_0(M) + U_1(M))|_{M \in S} = 0, \tag{1}$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $S$ , и условию на бесконечности

$$U_2(M) \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty, \tag{2}$$

где  $M$  – произвольная точка области  $D_2$ .

Потребуем выполнения условия непрерывности потенциала на части поверхности сферы  $\Gamma$ , которая не является экраном, и условия непрерывности поля на поверхности сферы:

$$U_0(r, \theta) + U_1(r, \theta) = U_2(r, \theta) \quad r = a, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (U_0(r, \theta) + U_1(r, \theta)) = \frac{\partial}{\partial r} U_2(r, \theta) \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (4)$$

Поставленная граничная задача (2)–(4) имеет единственное решение [3].

Согласно методу разделения переменных, решение поставленной граничной задачи будем искать в виде суперпозиции сферических гармонических функций:

$$U_1(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad r < a, \quad U_2(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), \quad r > a,$$

неизвестные коэффициенты  $x_n$ ,  $y_n$  подлежат определению из граничных условий.

Выполняя условия (1), (3)–(4), получим тройные сумматорные уравнения вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + g_n) X_n P_n(\cos \theta) = F(\theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad \theta_1 < \theta \leq \pi,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) X_n P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta < \theta_1,$$

которые преобразуются к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно специальным образом введенных функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  [2]:

$$\varphi_1(x) + \int_0^{\theta_0} K(x, t) \varphi_1(t) dt + \int_{\theta_1}^{\pi} [K_2(x, t) + K_3(x, t)] \varphi_2(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(n + 0,5)x, \quad 0 \leq x < \theta_0,$$

$$\varphi_2(x) + \int_{\theta_1}^{\pi} G(x, t) \varphi_2(t) dt + \int_0^{\theta_0} [K_1(x, t) + K_4(x, t)] \varphi_1(t) dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(n + 0,5)x, \quad \theta_1 < x \leq \pi.$$

Проведен вычислительный эксперимент. На рисунке показаны эквипотенциальные линии и линии напряженности магнитного поля задачи экранирования ( $\theta_0 = \pi/6$ ,  $\theta_1 = 2\pi/3$ ).

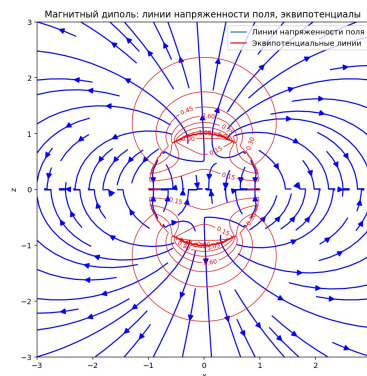


Рис. 1. Линии напряженности, эквипотенциалы

## Литература

1. Аполлонский, С. М. Моделирование и расчет электромагнитных полей в технических устройствах / С. М. Аполлонский. – М. : Русайнс, 2024. – 388 с.
2. Шушкевич, Г. Ч. Аналитическое решение задачи экранирования низкочастотного магнитного поля тонкими сферическими экранами / Г. Ч. Шушкевич // Информатика. – 2025. – Т. 22, № 3. – С. 59–71.
3. Корзюк, В. И. О разрешимости некоторых задач в теории экранирования полей системами экранов / В. И. Корзюк, Г. Ч. Шушкевич // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2006. – Т. 14, № 1. – С. 71–81.

**CLASSICAL SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM  
FOR A SEMILINEAR NONSTRICTLY HYPERBOLIC  
BIWAVE EQUATION**

**V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko**

In the domain

$$Q^{(1)} = \{(t, x) : t \in (t_0, \infty) \wedge x \in (x_0 + at_0 - at, x_0 - at_0 + at)\} \quad (\text{future cone})$$

of two independent variables  $(t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \subset \mathbb{R}^2$ , consider the one-dimensional nonlinear equation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u(t, x) = \mathcal{F}[u](t, x), \quad (1)$$

where  $a > 0$  and

$$\mathcal{F}[u](t, x) := f \left( t, x, u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), \frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x), \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t, x), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \right).$$

Equation (1) is supplemented with the boundary conditions

$$u(t, x = x_0 + at_0 - at) = \mu_1(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x = x_0 + at_0 - at) = \mu_2(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (3)$$

$$u(t, x = x_0 - at_0 + at) = \mu_3(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x = x_0 - at_0 + at) = \mu_4(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (5)$$

where  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , are functions given on the set  $[t_0, \infty)$ .

**Remark 1.** Condition (2) can be replaced by either the condition on the spatial derivative,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = x_0 + at_0 - at) = \varphi_2(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (6)$$

or the condition on the normal derivative,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t, x = x_0 + at_0 - at) = \psi_2(t), \quad t \in [t_0, \infty), \quad (7)$$

without significantly altering the statement of the problem. Given conditions (2) and (3), the values  $\varphi_2(t)$  and  $\psi_2(t)$  can be calculated for all  $t \in [t_0, \infty)$ . Conversely, from (2) and (6) one

can determine  $\mu_2(t)$  and  $\psi_2(t)$ , and from (2) and (7) one can determine  $\mu_2(t)$  and  $\varphi_2(t)$  for all  $t \in [t_0, \infty)$ . The same can be said about condition (4).

**Remark 2.** In problems analogous to (1)–(5), condition (7) is often preferred over condition (2). This is because on any characteristic curve, the normal derivative  $\partial_n u$  is taken in a direction non-tangential to the curve, whereas the directions of the derivatives  $\partial_t u$  and  $\partial_x u$  may coincide with the tangential direction. The same can be said about condition (4).

Similar problems for equations of the form

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f \left( t, x, u(t, x), \frac{\partial u}{\partial t}(t, x), \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)$$

were considered in [1–6].

The main result of this report is the following theorem.

**Theorem.** *Let the conditions  $\mu_1 \in C^5([t_0, \infty))$ ,  $\mu_2 \in C^4([t_0, \infty))$ ,  $\mu_3 \in C^5([t_0, \infty))$ ,  $\mu_4 \in C^4([t_0, \infty))$ , and  $f \in C^2(\overline{Q^{(1)}} \times \mathbb{R}^6)$  be satisfied, and let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition  $|f(t, x, \mathbf{u}) - f(t, x, \mathbf{z})| \leq L(t, x) \|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|_1$  with a function  $L \in C(\overline{Q^{(1)}})$ . Problem (1)–(5) has a unique solution  $u$  in the class  $C^4(\overline{Q^{(1)}})$  if and only if the following matching conditions are satisfied:*

$$\begin{aligned} \mu_1(t_0) - \mu_3(t_0) &= 0, \quad \mu_1''(t_0) - \mu_3''(t_0) = 2\mu_2'(t_0) - 2\mu_4'(t_0), \\ \mu_2(t_0) &= \frac{\mu_1'(t_0) + \mu_3'(t_0)}{2}, \quad \mu_4(t_0) = \frac{\mu_1'(t_0) + \mu_3'(t_0)}{2}. \end{aligned}$$

**Remark 3.** The proposed solution scheme can be transferred, without significant modification, to Goursat problems for Eq. (1) in other characteristic domains. These include the left cone, the past cone, and the right cone, defined respectively as

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= \left\{ (t, x) : x \in (-\infty, x_0) \wedge t \in \left( \frac{x - x_0 + at_0}{a}, \frac{x_0 - x + at_0}{a} \right) \right\} && \text{(left cone),} \\ Q^{(3)} &= \{ (t, x) : t \in (-\infty, t_0) \wedge x \in (x_0 - at_0 + at, x_0 + at_0 - at) \} && \text{(past cone),} \\ Q^{(4)} &= \left\{ (t, x) : x \in (x_0, \infty) \wedge t \in \left( \frac{x_0 - x + at_0}{a}, \frac{x - x_0 + at_0}{a} \right) \right\} && \text{(right cone),} \end{aligned}$$

For each  $i = 2, 3, 4$ , the boundary conditions on  $\partial Q^{(i)}$  are of the form

$$u(t, x) = \lambda_1(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \lambda_2(t, x), \quad (t, x) \in \partial Q^{(i)},$$

where  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are given functions on the respective boundaries.

### References

1. Korzyuk, V. I. Goursat's problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation / V. I. Korzyuk, O. A. Kovnatskaya, V. A. Sevastyuk // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2022. – Vol. 66, No. 4. – P. 391–396.
2. Korzyuk, V. I. Picard problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation of the second order / V. I. Korzyuk, O. A. Kovnatskaya // Tr. Inst. Mat., Minsk. – 2023. – Vol. 31, No. 1. – P. 70–80.
3. Korzyuk, V. I. Equations of Mathematical Physics / V. I. Korzyuk. – Moscow : LENAND, 2021. – 480 p.

4. Tucker, D. H. An existence theorem for a Goursat problem / D. H. Tucker // Pacific J. Math. – 1962. – Vol. 12, No. 2. – P. 719–727.
5. Lees, M. The Goursat problem / M. Lees // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1960. – Vol. 8, No. 3. – P. 518–530.
6. Alexiewicz, A. Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$  / A. Alexiewicz, W. Orlicz // Studia Mathematica. – 1956. – Vol. 15, No. 2. – P. 201–215.

## CLASSICAL SOLUTION OF THE FIRST MIXED PROBLEM FOR A SEMILINEAR WAVE EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko, I.S. Kozlovskaya

In the domain  $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$  of two independent variables  $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ , consider the one-dimensional nonlinear equation

$$(\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (1)$$

where  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , and  $f$  is a function given on the set  $\overline{Q} \times \mathbb{R}$ . Equation (1) is equipped with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

and the boundary condition

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

where  $\varphi$ ,  $\psi$ , and  $\mu$  are functions given on the half-line  $[0, \infty)$ .

We call Eq. (1) a semilinear wave equation with a mixed derivative, because its principal part is of the form:

$$(\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x) = \partial_t^2 + (a_1 - a_2)\partial_t \partial_x - a_1 a_2 \partial_x^2,$$

where terms  $\partial_t^2$  and  $-a_1 a_2 \partial_x^2$  corresponds to the terms  $\partial_t^2$  and  $-a^2 \partial_x^2$  of the classical wave equation, respectively, and the term  $(a_1 - a_2)\partial_t \partial_x$  corresponds to an additional mixed derivative.

In the case  $a_1 = a_2$  problem (1)–(3) was considered in [1–8]. Mixed problems for Eq. (1) in the linear case, i.e.,  $f(t, x, u) = F(t, x) + q(t, x)u$ , were considered in [9–12].

The main results of this paper are presented below: the existence and uniqueness of a classical solution to problem (1)–(3).

**Theorem.** *Let the conditions be satisfied  $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ ,  $\varphi \in C^2([0, \infty))$ ,  $\psi \in C^1([0, \infty))$ , and  $\mu \in C^2([0, \infty))$ , and let the function  $f$  satisfy the Lipschitz condition with a function  $L \in L_{loc}^1(\overline{Q})$  with respect to the third variable, i.e.,  $|f(t, x, z) - f(t, x, w)| \leq L(t, x)|z - w|$ . The first mixed problem (1)–(3) has a unique solution  $u: \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$  in the class  $C^2(\overline{Q})$  if and only if the following matching conditions are satisfied:*

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \varphi(0), \\ \mu'(0) &= \psi(0), \\ \mu''(0) &= f(0, 0, \varphi(0)) - a_1 \psi'(0) + a_2 \psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0). \end{aligned}$$

*This solution is determined by the formulas*

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{a_2 \varphi(x - a_1 t) + a_1 \varphi(x + a_2 t)}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x - a_1 t}^{x + a_2 t} \psi(z) dz + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} f(\tau, z, u(\tau, z)) dz, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad x - a_1 t \geq 0, \\
 u(t, x) &= \mu\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{a_1 \varphi(x + a_2 t)}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 \varphi\left(a_2\left(t - \frac{x}{a_1}\right)\right)}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{a_2(t - x/a_1)}^{x + a_2 t} \psi(z) dz + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t - x/a_1}^t d\tau \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} f(\tau, z, u(\tau, z)) dz + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{t - x/a_1} d\tau \int_{a_2(t - x/a_1 - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} f(\tau, z, u(\tau, z)) dz, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad x - a_1 t \leq 0.
 \end{aligned}$$

### References

1. Korzyuk, V. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Tele-graph Equation with a Nonlinear Potential / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // Differ. Equ. – Vol. 58, No. 2. – P. 175–186.
2. Korzyuk, V. I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat. – 2023. – Vol. 43. – P. 48–63.
3. Korzyuk, V. I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Tele-graph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // Differ. Equ. – Vol. 59, No. 8. – P. 1075–1089.
4. Korzyuk, V. I. Classical Solution of a Mixed Problem with the Zaremba Boundary Condition and Conjugation Conditions for a Semilinear Wave Equation / V. I. Korzyuk, J. V. Rudzko // J. Math. Sci., New York. – 2025. – Vol. 293, No. 5. – P. 678–693.
5. Karziuk, V. Classical Solution of Arbitrary Smoothness of the First Mixed Problem for the Semilinear Klein–Gordon–Fock Type Equation in a Half-Strip / V. Karziuk, I. Staliarchuk // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control. – 2025. – Vol. 15, No. 3. – P. 66–77.
6. Naumkin, I. P. Klein–Gordon Equation with Critical Nonlinearity and Inhomogeneous Dirichlet Boundary Conditions / I. P. Naumkin // Differential and Integral Equations. – 2016. – Vol. 29, No. 1/2. – P. 55–92.
7. Fokas, A. S. Linearizable Initial Boundary Value Problems for the Sine-Gordon Equation on the Half-Line / A. S. Fokas // Nonlinearity. – 2004. – Vol. 17, No. 4. – P. 1521–1534.
8. Korpusov, M. O. Analytical-Numerical Study of Finite-Time Blow-up of the Solution to the Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Klein–Gordon Equation / M. O. Korpusov, A. N. Levashov, D. V. Lukyanenko // Comput. Math. and Math. Phys. – 2020. – Vol. 60. – P. 1452–1460.
9. Rykhlov, V. S. Classical Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the Wave Equation with Mixed Derivative / V. S. Rykhlov // J. Math. Sci., New York. – 2025. – Vol. 287, No. 4. – P. 630–663.

10. Rykhlov, V. S. Generalized Solution of the Initial-Boundary-Value Problem for the Wave Equation with a Mixed Derivative and a General Potential / V. S. Rykhlov // *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.* – 2024. – Vol. 232. – P. 99–121.

11. Rykhlov, V. S. On the Solution of the Initial-Boundary Problem in a Half-Strip for a Hyperbolic Equation with a Mixed Derivative / V. S. Rykhlov // *Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.* – 2023. – Vol. 226. – P. 89–107.

12. Rykhlov, V. S. Generalized Initial-Boundary Problem for the Wave Equation with Mixed Derivative / V. S. Rykhlov // *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.* – 2023. – Vol. 69, No. 2. – P. 342–363.

## ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A CONJUGATION CONDITION FOR A PARABOLIC EQUATION WITH INVOLUTION

J.A. Otarova, G.A. Koshkarbaeva

In recent decades, there has been a steady growth of interest in the study of boundary value problems for differential equations with involution—that is, equations containing a reflection of the argument. Such models arise in describing processes with symmetry, reflection of the medium, as well as in problems of heat conduction, mechanics, and control theory. In contrast to classical equations of mathematical physics, the presence of an involution leads to the emergence of non-local effects and significantly alters the spectral properties of the corresponding operators [1–3].

Boundary value problems for parabolic equations with involution are being actively studied by various authors [4]. In particular, in works devoted to heat equations with reflection of the argument, well-posedness theorems have been proven, and stability estimates for solutions in various functional spaces have been obtained. For instance, in the studies by A. Ashyralyev and co-authors [5–6], conditions for well-posedness were established and stability estimates were derived for parabolic equations with involution. Similar questions regarding the existence and stability of solutions are also considered in both numerical and analytical settings.

In the domain  $Q = \{(x, t) : -T < t < T, -1 < x < 1\}$ , we consider the following equation:

$$f(x, t) = \begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + \alpha u_{xx}(-x, t), & t > 0, \\ u_t(x, t) - u_{xx}(x, t), & t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

where  $Q^+ = Q \cap \{t > 0\}$ ,  $Q^- = Q \cap \{t < 0\}$ ,  $\alpha$  is a real parameter,  $|\alpha| < 1$ , and  $f(x, t)$  is a given function.

**Problem 1.** Find a function  $u(x, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_{x,t}^{2,1}(\overline{Q^+}) \cap C_{x,t}^{2,1}(\overline{Q^-})$  in the domain  $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$  that satisfies equation (1), the boundary conditions:

$$u(-1, t) = u(1, t) = 0, \quad -T \leq t \leq T,$$

$$u(x, -T) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

and the conjugation condition on the line  $t = 0$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

### References

1. Cabada, A., Tojo, F. A. *Differential Equations with Involutions.* – Atlantis Press, Paris, 2015.

2. Przeworska-Rolewicz, D. Equations with Transformed Argument. – Elsevier, 1973.
3. Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. – World Scientific, 1993.
4. Al-Salti, N., Kirane, M., Toubek, B. T. On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. – 2019. – Vol. 48, No. 3. – P. 669–681.
5. Ashyralyev, A., Sarsenbi, A. Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – Vol. 38, No. 10. – P. 1295–1304.
6. Ashyralyev, A. On hyperbolic-parabolic problems with involution and nonlocal conditions // International Journal of Applied Mathematics. – 2021.

## ON SKEW-ADJOINTNESS OF A VECTOR TRANSPORT OPERATOR

E.Yu. Panov

We study Cauchy problem for a system of  $m$  linear transport equations in the half-space  $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

$$u_{it} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^k(x) u_{jx_k} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

with the initial condition

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

We assume that the coefficients  $a_{ij}^k(x) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  satisfy the symmetricity condition  $a_{ij}^k(x) = a_{ji}^k(x)$  a.e. on  $\mathbb{R}^n$  and the solenoidality condition

$$\sum_{k=1}^n (a_{ij}^k)_{x_k}(x) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \quad (3)$$

Denote by  $A^k = A^k(x)$  the symmetric  $m \times m$  matrices with entries  $a_{ij}^k(x)$ . Then system (1) can be written as  $u_t + \sum_{k=1}^n A^k(x) u_{x_k} = 0$ , where  $u = u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)) \in \mathbb{R}^m$ . Similarly, initial condition (2) reads  $u(0, x) = u_0(x) \doteq (u_{01}(x), \dots, u_{0m}(x))$ . By solenoidality condition (3) system (1) admits the conservative form  $u_t + \sum_{k=1}^n (A^k u)_{x_k} = 0$ , which allows to introduce the notion of weak solution to problem (1), (2).

**Definition 1.** A vector-function  $u = u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$  is called a weak solution of (1), (2) if for each test function  $f = f(t, x) \in C_0^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\int_{\Pi} [u \cdot f_t + \sum_{k=1}^n A_k(x) u \cdot f_{x_k}] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \cdot f(0, x) dx = 0.$$

Here we denote by “ $\cdot$ ” the scalar multiplication in  $\mathbb{R}^m$ .

We introduce the linear operator  $S_0$  in the real Hilbert space  $H = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , given by the expression  $S_0 u = \sum_{k=1}^n A_k(x) u_{x_k}(x)$ ,  $u \in D(S_0) = C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . In view of symmetricity of  $A^k$  and condition (3) we find that  $\forall u, v \in D(S_0)$

$$\begin{aligned}
(S_0 u, v)_H + (u, S_0 v)_H &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m a_{ij}^k(x) (u_{jx_k} v_i + u_j v_{ix_k}) dx = \\
&= \sum_{i,j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^n a_{ij}^k(x) (u_j v_i)_{x_k} dx = 0,
\end{aligned}$$

and the operator  $S_0$  is skew-symmetric. In particular,  $S_0$  admits a closure, that we denote by  $S$ . Let  $S^*$  be the adjoint operator to  $S$ . The skew-symmetric operator  $-S$  admits a maximal dissipative extension denoted by  $G$ . As was demonstrated in [1],  $-S \subset G \subset S^*$  and  $G$  generates a contractive semigroup  $e^{tG}$  on  $H$  such that  $u = (e^{tG} u_0)(x)$  is a weak solution of (1), (2) for every  $u_0 \in H$ . The uniqueness of weak solutions (to both direct and inverse problems) holds if and only if the operator  $S$  is skew-adjoint, i.e.,  $-S = S^*$ , see [1]. Below we establish skew-adjointness of  $S$  in the case of bounded Lipschitz coefficients  $a_{ij}^k \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ . For that, we will need a variant of the DiPerna-Lions commutator lemma [2, Lemma II.1]. Let  $\rho(z) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  be an averaging kernel, i.e.,  $\rho(z) \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(z) dz = 1$ . For  $u(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  we introduce the corresponding averaged functions  $u_h(x) = u * \rho_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(x-y) u(y) dy$ , where  $h > 0$ ,  $\rho_h(z) = h^{-n} \rho(h^{-1}z)$ .

**Lemma 1.** *Let  $a(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  be a Lipschitz function on  $\mathbb{R}^n$ ,  $u(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Then  $\forall j = 1, \dots, n$*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a u_h - (a u)_h)(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n).$$

Now, we are ready to prove that in the case of bounded Lipschitz matrices  $A_k(x)$  the operator  $S$  is skew-adjoint. First of all, we notice that the Sobolev space  $W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  lies in  $D(S)$ , and  $Su = \sum_{k=1}^n A_k(x) u_{x_k}$  for  $u \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . In fact, for each vector  $u \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  there exists a sequence  $u_r \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  converging to  $u$  in  $W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Taking into account that coefficients  $A_k(x)$  are bounded, we find that  $u_r \rightarrow u$ ,  $Su_r = S_0 u_r \rightarrow \sum_{k=1}^n A_k(x) u_{x_k}$  as  $r \rightarrow \infty$  in  $H$ . Since the operator  $S$  is closed, we conclude that  $u \in D(S)$  and that  $Su = \sum_{k=1}^n A_k(x) u_{x_k}(x)$ . Now, let  $v = v(x) \in H$ . Then there exists  $u \in H$  such that  $u - S^* u = v$  (this follows from the inclusion  $G \subset S^*$  and  $m$ -dissipativity of  $G$ ). This equality means that  $u(x) + \sum_{k=1}^n (A^k(x) u(x))_{x_k} = v(x)$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . The averaged functions  $u_h, v_h \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \subset D(S)$  and  $u_h \rightarrow u$ ,  $v_h \rightarrow v$  in  $H$  as  $h \rightarrow 0$ . By Lemma 1 we have

$$u_h + Su_h = v_h + \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} (A^k(x) u_h(x) - (A^k(x) u)_h(x)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} v(x)$$

in  $H$ . It follows that  $u_h \rightarrow 0$ ,  $Su_h \rightarrow v - u$  as  $h \rightarrow 0$  in  $H$ . Since the operator  $S$  is closed, we conclude that  $u \in D(S)$  and  $u + Su = v$ . Hence, the operator  $E + S$  is surjective, where we denote by  $E$  the identity operator. By the similar reasons applied to  $-S$ , we obtain that the operator  $E - S$  is surjective as well. This means that the deficiency indexes of  $S$  are trivial,

and therefore this operator is skew-adjoint. In particular,  $G = -S$  and the operator group  $e^{-tS}$  is unitary. We have established the desired result:

**Theorem 1.** *Suppose that the coefficients  $a_{ij}^k \in W_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ . Then there exists a unique weak solution  $u = e^{-tS}u_0(x)$  of (1), (2). This solution satisfies the energy conservation property  $\|u(t, \cdot)\|_H = \|u_0\|_H$ .*

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the State task.

### References

1. Panov, E. Yu. On linear evolutionary equations with skew symmetric spatial operators / E. Yu. Panov // Preprint, arXiv: 2507.09314, 12 Jul. 2025, <https://arxiv.org/pdf/2507.09314>
2. DiPerna, R. J., Lions, P. L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces / R. J. Diperna, P. L. Lions // Invent. Math. – 1989. – Vol. 98. – P. 511–547.

## REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION

A.V. Yuldasheva

Let a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  be given. Consider the equation

$$u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

with conditions

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad u(y, t)|_{y \in \partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Boundary value problems with data prescribed on the entire boundary of a domain for hyperbolic partial differential equations are, in general, ill-posed. The question of their solvability is often related to the so-called small denominators problem. A prominent example of this is the Dirichlet problem for the wave equation for a vibrating string, which has been studied in detail by both domestic and international researchers.

From a mathematical point of view, the phenomenon of small denominators manifests itself in the fact that solutions of the equations of motion, represented in the form of Fourier series, contain an infinite number of terms whose coefficients have denominators that can become arbitrarily small, leading to divergence of the series.

This was first noted by D. Borgin and R. Duffin [1] (see also [2]).

In [3], the existence of an  $L_2$ -solution of the Dirichlet problem for the wave equation in a rectangle was studied.

In cases where the governing equation involves differences of derivatives of arbitrary even order, boundary value problems were investigated in [4].

Let  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  be the sequence of eigenvalues, and  $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$  be a complete orthonormal system of eigenfunctions of the problem

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

We denote the corresponding operator by  $A = -\Delta$ .

The solution of problem (1)-(2) has the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} t}{\sin \sqrt{\lambda_k} T} \psi_k v_k(x), \quad \psi_k = (\psi, v_k). \quad (3)$$

**Theorem 1.** *Let  $\psi \in D(A^s)$ . If  $s > s_0$ , then the function  $u(x, t)$  is a solution of problem (1)-(2).*

For any  $\alpha > 0$  and  $p > 0$ , we introduce a function

$$u_{\alpha}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} T}{\sin^2 \sqrt{\lambda_k} T + \alpha \lambda_k^p} \psi_k v_k(x) \sin \sqrt{\lambda_k} t. \quad (4)$$

**Theorem 2.** *Let  $\alpha > 0$  and  $s \geq 0$ . If  $\psi \in D(A^s)$ , then the function  $u_{\alpha}(x, t)$  belongs to the Sobolev space  $W_2^{p+2s}(\Omega)$ .*

Consider the difference

$$\begin{aligned} u(x, t) - u_{\alpha}(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sin \sqrt{\lambda_k} T} - \frac{\sin \sqrt{\lambda_k} T}{\sin^2 \sqrt{\lambda_k} T + \alpha \lambda_k^p} \right] \psi_k v_k(x) \sin \sqrt{\lambda_k} t = \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^p}{\sin \sqrt{\lambda_k} T (\sin^2 \sqrt{\lambda_k} T + \alpha \lambda_k^p)} \psi_k v_k(x) \sin \sqrt{\lambda_k} t. \end{aligned}$$

**Theorem 3.** *Let  $\psi \in D(A^s)$ . If  $s > s_p$ , then  $u_{\alpha}(x, t) \rightarrow u(x, t)$  as  $\alpha \rightarrow 0^+$  uniformly in  $x \in \Omega$  and  $t \in [0, T]$ .*

### References

1. Bourgin, D. G., Duffin, R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation / D. G. Bourgin, R. Duffin // Bull. Amer. Math. Soc. – 1939–45. – No 12. – P. 851–858.
2. Ptashnik B. I. Ill-posed boundary value problems for partial differential equations / B. I. Ptashnik // Naukova Dumka. – 1984.
3. Alimov, Sh. A. On the Solvability of an Ill-Posed Problem / Sh. A. Alimov // Uz. M. J. – 1999. – No. 3. – P. 19-29.
4. Yuldasheva, A. V. On solvability of the boundary value problem for one even-order equation / A. V. Yuldasheva // Bulletin KRASEC. Phys. and Math. Sci. – 2016.–12:1. – P. 35-40.

# ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ

## АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ НА ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩИЕ ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

А.Б. Антоневиц, И.Л. Люксембург

Одной из наиболее часто используемых алгебр разрывных функций является алгебра  $SD[0; 1]$ , состоящая из всех комплекснозначных функций на отрезке  $[0; 1]$ , допускающих разрывы только первого рода (Simple Discontinuity). Это означает, что каждая функция  $f$  при  $x \in (0; 1]$  имеет предел слева:  $f^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  и при  $x \in [0; 1)$  имеет предел справа:  $f^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ . Из стандартных свойств пределов следует, что алгебра  $SD[0; 1]$  является полной в равномерной норме  $\|f\| = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  есть алгебра операторов умножения на функции из  $SD[0; 1]$ , действующих в  $L_p([0; 1], \mu)$ , где  $\mu$  — заданная мера. Алгебра  $\mathcal{A}$  не изоморфна  $SD[0; 1]$ , так как если функции  $\mu$ -почти всюду совпадают, то они порождают один и тот же оператор.

Пусть  $S$  — носитель меры  $\mu$ , без исключения общности будем считать, что  $0, 1 \in S$ . Обозначим  $SD(S)$  алгебру функций, являющихся ограничениями на  $S$  функций из  $SD[0; 1]$ . Поскольку  $S$  компакт принадлежащий  $[0; 1]$  его дополнение есть счётное семейство непересекающихся интервалов. Концы этих интервалов, а также точки 0 и 1 будем называть крайними точками множества  $S$ , а остальные точки — внутренними. Определим подалгебру  $T(S) \subset SD(S)$ , состоящую из функций, непрерывных в крайних точках множества  $S$  и непрерывных слева во внутренних. В частности, если  $S = [0; 1]$ , то  $T[0; 1]$  состоит из непрерывных в 0 и 1 и непрерывных слева на  $(0; 1)$  функций из  $SD[0; 1]$ .

Пусть  $I_S$  идеал алгебры  $SD[0; 1]$ , состоящий из функций  $\mu$ -почти всюду равных нулю на множестве  $S$ . Так как множество точек разрыва функции из  $SD[0; 1]$  не более чем счётно, принадлежность идеалу  $I_S$  эквивалентно тому, что её ограничение на  $S$  отлично от нуля на не более чем счётном множестве. Рассмотрим фактор-алгебру  $SD[0; 1]/I_S$ . Согласно [1] (см. §2), норма класса  $X = f + I_S$  эквивалентных функций определяется как инфимум их норм:  $\|X\| = \inf_{f \in X} \|f\|$ . Справедлива следующая

**Лемма 1.** Если  $\mu$  непрерывная мера с носителем  $S \subset [0; 1]$ , то алгебра  $\mathcal{A}$  изометрически изоморфна:

- 1) Фактор-алгебре  $SD[0; 1]/I_S$ .
- 2) Подалгебре  $T(S) \subset SD(S)$ .
- 3) Подалгебре  $T[0; 1] \subset SD[0; 1]$ .

**Замечание 1.** Таким образом, изучение любой алгебры операторов умножения на функции из  $SD[0; 1]$ , действующих в пространствах Лебега с любой непрерывной мерой сводится к изучению алгебры  $T[0; 1]$ .

Известно (см. §4 в [1]), что есть взаимно-однозначное соответствие между линейными мультипликативными функционалами банаховой алгебры и ее максимальными идеалами. Так, ядро каждого линейного мультипликативного функционала есть максимальный идеал, а фактор-отображение по всякому максимальному идеалу является линейным мультипликативным функционалом.

Для  $\tau \in (0; 1]$  определим отображение  $\varphi_\tau^- : T[0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , действующее по правилу:  $\varphi_\tau^-(f) = f^-(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau-0} f(t)$  и для  $\tau \in [0; 1)$  отображение  $\varphi_\tau^+ : T[0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , действующее по правилу:  $\varphi_\tau^+(f) = f^+(\tau) = \lim_{t \rightarrow \tau+0} f(t)$ . Из стандартных свойств пределов следует, что они являются линейными мультипликативными функционалами. Ядрами описанных функционалов являются максимальные идеалы  $M_\tau^+$  и  $M_\tau^-$ , состоящие из функций, предел которых справа и слева соответственно в точке  $\tau$  равны нулю.

**Теорема 1.** *Каждый максимальный идеал алгебры  $T[0; 1]$  есть или  $M_\tau^-$  или  $M_\tau^+$ .*

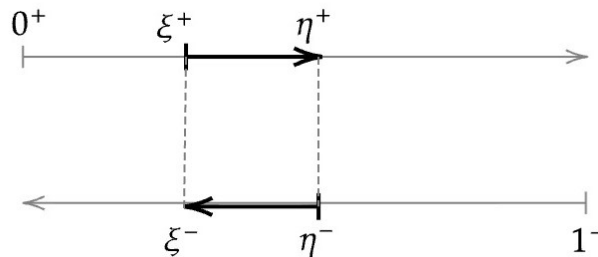
Преобразование Гельфанда  $\hat{f}$  элемента алгебры  $f \in A$ , это функция  $\hat{f}(M)$  на множестве  $\mathfrak{M}(A)$  максимальных идеалов этой алгебры. В нашем случае эта функция определяется так:  $\hat{f}(M_\tau^+) = \varphi_\tau^+(f) = f^+(\tau)$  и  $\hat{f}(M_\tau^-) = \varphi_\tau^-(f) = f^-(\tau)$ .

На пространстве максимальных идеалов определена так называемая гельфандовская топология — слабая топология для которой все  $\hat{f}$  непрерывны. Она превращает  $\mathfrak{M}(A)$  в компактное хаусдорфово топологическое пространство.

Множество всех  $\hat{f}$  образует замкнутую симметричную подалгебру в  $C(\mathfrak{M}(T[0; 1]))$ , которая содержит константы и разделяет точки, а значит в силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса (см. Глава 5 в [2]) совпадает со всей алгеброй  $C(\mathfrak{M}(T[0; 1]))$ . Таким образом, алгебра  $T[0; 1]$  изометрически изоморфна алгебре  $C(\mathfrak{M}(T[0; 1]))$ .

Система множеств вида  $\{M_\tau^+\}_{\tau \in [x; y]} \cup \{M_\tau^-\}_{\tau \in (x; y]}$ , где  $x, y \in [0; 1]$  и  $x < y$  образуют базу топологии  $\mathfrak{M}(T[0; 1])$ , которую будем называть стандартной базой. В дальнейшем нам будут удобны следующие обозначения:  $M_\tau^+ = \tau^+$ ,  $M_\tau^- = \tau^-$ .

Оказалось, что построенное пространство  $\mathfrak{M}(T[0; 1])$  гомеоморфно известному пространству «две стрелки», сконструированному П.С. Александровым и П.С. Урысоном в их классической работе [3].



**Рис. 1.** Пространство «две стрелки» с выделенным элементом из стандартной базы, являющимся окрестностью точек  $\xi^+$  и  $\eta^-$ .

В последующем пространство «две стрелки» изучалось с разных точек зрения и стало универсальным примером компакта с экзотическими свойствами.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция-2030» (задание 1.08.1) и частичной поддержке БРФФИ (№ Ф25МП-010).

### Литература

1. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1960.
2. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975.
3. Александров, П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П. С. Александров, П. С. Урысон. — М. : Наука, 1971.

## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СПЕЦИАЛЬНОМ КОНУСЕ

**В.Б. Васильев, И.И. Клименко, Т.В. Сопова**

Изучается разрешимость уравнения

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in C, \quad (1)$$

в пространстве Соболева–Слободянского  $H^s(C_+^{ab})$ , где  $C_+^{ab} \subset \mathbb{R}^m$  – выпуклый острый конус вида

$$C_+^{ab} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a|x_1| + b|x_2|, a, b > 0\},$$

$A$  – модельный псевдодифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi dy$$

с локально интегрируемым символом  $A(\xi)$ , удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$c_1, c_2$  – положительные постоянные.

Пространство  $H^s(C_+^{ab})$  [1] – это подпространство  $H^s(\mathbb{R}^3)$  с индуцированной нормой

$$\|u\|_s = \left( \int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^{2s}) d\xi \right)^{1/2},$$

причем  $\text{supp } u \subset \overline{C_+^{ab}}$ , и  $\tilde{u}$  обозначает преобразование Фурье функции  $u$ .

Правая часть уравнения (1) выбирается из пространства  $\dot{H}^{s-\alpha}(C)$ , которое состоит из обобщенных функций медленного роста  $S'(C)$ , допускающих продолжение на  $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$  с конечной нормой

$$\|v\|_{s-\alpha}^+ = \inf \|\ell v\|_{s-\alpha},$$

где инфимум берется по всем продолжениям  $\ell$ .

Ключевую роль в изучении разрешимости уравнения (1) играет понятие волновой факторизации символа [1]. Обозначим  $C_+^{*ab}$  сопряженный к  $C_+^{ab}$  конус,  $T(C_+^{*ab})$  – радиальная трубчатая область над  $C_+^{*ab}$  [1]. Напомним, что волновой факторизацией символа относительно конуса  $C_+^{ab}$  называется его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi),$$

где  $A_{\neq}(\xi)$ ,  $A_{=}(\xi)$  должны удовлетворять следующим условиям:

- 1)  $A_{\neq}(\xi)$  и  $A_{=}(\xi)$  определены для почти всех  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , возможно, кроме точек на границе конуса  $C_+^{*ab} \cup (-C_+^{*ab})$ ;
- 2)  $A_{\neq}(\xi)$  и  $A_{=}(\xi)$  допускают аналитические продолжения в радиальные трубчатые области  $T(C_+^{*ab})$  и  $T(-C_+^{*ab})$  над конусами  $C_+^{*ab}$  и  $-C_+^{*ab}$  соответственно, и эти продолжения удовлетворяют оценкам

$$|A_{\neq}^{\pm}(\xi + i\tau)|(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm\alpha} \leq c_1, \quad |A_{\neq}^{\pm}(\xi - i\tau)|(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha-\alpha)} \leq c_2, \quad \forall \tau \in C_{+}^{ab*},$$

с положительными постоянными  $c_1, c_2$ . Число  $\alpha \in \mathbb{R}$  называется индексом волновой факторизации.

**Теорема.** Предположим, что символ  $A(\xi)$  допускает волновую факторизацию относительно  $C_{+}^{ab}$  с индексом  $\alpha$  таким, что  $\alpha - s = -n + \varepsilon$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\varepsilon| < 1/2$ . Тогда существует единственный набор функций  $\tilde{h}_k \in \tilde{H}^{s_k}(\mathbb{R}^2)$ ,  $s_k = s - \alpha - k + 1/2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tilde{u} \in \tilde{H}^s(C_{+}^{ab})$ , что решение  $\tilde{w}$  уравнения (1) для произвольной правой части  $v \in \dot{H}^{s-\alpha}(C_{+}^{ab})$  представимо в виде

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\xi) = \tilde{u}(\xi) + \sum_{k=1}^n \frac{2ia}{A_{\neq}(\xi)(\xi_1 - a\xi_3 + i)^k} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{h}_k(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2}{(\xi_1 + a\xi_3 - \mu_1 - it)(\xi_2 - b\xi_3 - \mu_2 + it)} - \\ - \sum_{k=1}^n \frac{2ia}{A_{\neq}(\xi)(\xi_1 - a\xi_3 + i)^k} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{h}_k(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2}{(\xi_1 + a\xi_3 - \mu_1 - it)(\xi_2 + b\xi_3 - \mu_2 - it)} \end{aligned}$$

Имеют место априорные оценки

$$\|u\|_s \leq \text{const} \|v\|_{s-\alpha}^+, \quad [h_k]_{s_k} \leq \text{const} \|v\|_{s-\alpha}^+,$$

где  $[\cdot]_s$  обозначает норму в пространстве  $H^s(\mathbb{R}^2)$ ,  $s_k = s - \alpha - k + 1/2$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Следствие.** Пусть выполнены условия Теоремы. Для того, чтобы решение уравнения принадлежало пространству  $H^s(C_{+}^{ab})$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{h}_k(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2}{(\xi_1 + a\xi_3 - \mu_1 - it)(\xi_2 - b\xi_3 - \mu_2 + it)} = 0, \\ \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\tilde{h}_k(\mu_1, \mu_2) d\mu_1 d\mu_2}{(\xi_1 + a\xi_2 - \mu_1 - it)(\xi_2 + b\xi_3 - \mu_2 - it)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

При выполнении условий (2) решение уравнения имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{4iab}{A_{\neq}(\xi)(\xi_1 - a\xi_2 + i)^n} \lim_{\tau \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(\eta_1 - a\eta_2 + i)^n (\xi_3 - z_3) (A_{-}^{-1} \tilde{\ell} v)(\eta) d\eta}{((\xi_1 - \eta_1)^2 - a^2(\xi_2 - z_3)^2)((\xi_2 - \eta_2)^2 - b^2(\xi_3 - z_3)^2)}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 25-21-00688.

### Литература

1 Vasil'ev, V. B. Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. Introduction to the Theory of Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains / V. B. Vasil'ev. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000. – ix, 192 p.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю.М. Вувуникян, И.В. Трифонова

Эволюция состояния динамической системы описывается эволюционным оператором  $U(t)$  системы, который определяется операторным уравнением  $U'(t) = A(U(t))$ , где  $A$  – производящий оператор эволюции системы.

В простейшем линейном случае, когда  $A$  – ограниченный линейный оператор в полном нормированном пространстве, оператор эволюции системы определяется с помощью операторной экспоненты:

$$U(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (t^k A^k).$$

В более общем случае, когда  $A$  – замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в полном нормированном пространстве, построение оператора эволюции системы является основной частью классической теории полугрупп операторов.

В нелинейном случае мы рассматриваем уравнение  $x'(t) = Ax(t)$ , где  $A$  – нелинейный интегральный оператор Вольтерра:  $Ax(t) = \int_0^t K(t, s, x(s))ds$ , т.е. рассматриваем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра

$$x'(t) = \int_0^t K(t, s, x(s))ds, \quad (1)$$

где ядро  $K(t, s, x)$  – вектор-функция трех переменных со значениями в полном нормированном пространстве  $X$ , определенная и непрерывна на множестве  $[0, +\infty) \times [0, +\infty) \times X$ . Доказано, что если ядро удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу, т.е. существует такое число  $L > 0$ , что для всех  $x_1, x_2 \in X$  справедливо неравенство

$$\|K(t, s, x_2) - K(t, s, x_1)\| \leq L\|x_2 - x_1\|,$$

то задача Коши  $x(0) = x_0$  для интегро-дифференциального уравнения (1) имеет единственное решение. Обобщенный оператор эволюции  $U(t)$ , соответствующий рассматриваемому нелинейному интегро-дифференциальному уравнению определяется равенством  $U(t)x_0 = x(t)$ .

Операторы эволюции систем играют основополагающую роль в моделировании, оптимизации и управлении динамическими системами. Среди них операторы с импульсными характеристиками, обеспечивающие мощную математическую основу для описания явлений, включающих внезапные изменения состояния, мгновенные возмущения и событийные механизмы.

Отметим основные свойства определенной выше операторной функции:

1)  $U(0) = I$ ; 2)  $U(t+s) = U(t) + U(s)$ ; 3)  $U'(0) = A$ .

В силу выполнения этих свойств, операторную функцию  $U(t)$  часто называют (как и в линейном случае) полугруппой операторов с инфитезимальным оператором  $A$ .

Рассмотрим теперь неоднородное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра:

$$x'(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds + y(t), \quad (2)$$

где  $y$  – заданная непрерывная на  $[0, +\infty)$  функция со значениями в  $X$ ,  $x$  – искомая определенная и непрерывная на  $[0, +\infty)$  функция, называемая решением интегрального уравнения (2).

Решения рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений описывается в следующем предложении.

Решение однородного уравнения (1), т.е. когда  $y(t) = 0$ , определяется равенством  $x(t) = U(t)x_0$ , а в общем случае интегрально-дифференциального уравнения (2), т.е. когда  $y(t) \neq 0$ , представляется равенством  $x(t) = U(t)x_0 + (U * y)(t)$ , где  $U * y$  – свертка функций  $U$  и  $y$ , т.е.  $(U * y)(t) = \int_a^t U(t-s)y(s)ds$ .

Наконец, рассмотрим важный в приложениях случай, когда функция  $y$  зависит не только от переменной  $t$ , но и зависит от искомой функций, т.е. нелинейное интегро-дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$x'(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds + y(t, x(t)), \quad (3)$$

где  $y$  – заданная непрерывная на  $[0, +\infty) \times X$  функция со значениями в  $X$ ,  $x$  – искомая определенная и непрерывная на  $[0, +\infty)$  функция со значениями в  $X$ , называемая решением интегрального уравнения (3).

Будем предполагать, что функции  $K(t, s, x)$  и  $y(t, x)$  дополнительно удовлетворяют следующим условиям:

1)  $K(t, s, x)$  удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу, т.е. существует такое число  $L_1 > 0$ , что для всех  $x_1, x_2 \in X$  справедливо неравенство

$$||K(t, s, x_2) - K(t, s, x_1)|| \leq L_1 ||x_2 - x_1||. \quad (4)$$

2)  $y(t, x)$  удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, т.е. существует такое число  $L_2 > 0$ , что для всех  $x_1, x_2 \in X$  справедливо неравенство

$$||y(t, x_2) - y(t, x_1)|| \leq L_2 ||x_2 - x_1||. \quad (5)$$

Для уравнения (3) поставим задачу Коши, задав начальное условие  $x(a) = x^0$ .

Тогда рассматриваемая задача Коши эквивалентна решению следующего уравнения

$$x(t) = x^0 + \int_a^t \int_a^\tau K(\tau, s, x(s))dsd\tau + \int_a^t y(\tau, x(\tau))d\tau,$$

для решения которого применяется итерационный метод. В результате получаем следующее утверждение:

Решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения (3), в котором функции  $K(t, s, x)$  и  $y(t, x)$  удовлетворяют условиям (4) и (5), существует и единственно.

Полученные результаты могут быть использованы в научных исследованиях по теории интегро-дифференциальных операторов, а также в учебном процессе при преподавании учебных дисциплин «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Математическое моделирование в естествознании», «Моделирование нейронных сетей третьего поколения», «Модели решения задач в интеллектуальных системах» и специальных курсов по теории эволюционных операторов и математическому моделированию для студентов специальностей «Прикладная математика» и «Искусственный интеллект».

## НЕЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

О.В. Матысик

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к

большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач. Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике, экономике и управлении может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода  $Ax = y, x \in X, y \in Y$  с заданным оператором  $A : X \rightarrow Y$  и элементом  $y$ ,  $X$  и  $Y$  – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы.

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике  $l_2$ , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии и т. д.

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [1–3].

В настоящей статье предлагается неявная итерационная процедура решения некорректных задач в гильбертовом пространстве и проведено исследование ее некоторых свойств. Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным явным методом итераций Ландвебера [3]  $x_{n+1} = x_n + \alpha(y - Ax_n)$ ,  $x_0 = 0$  показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле метод Ландвебера предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В методе Ландвебера на параметр  $\alpha$  накладывается ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может привести на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемой неявной схеме итераций ограничений сверху на  $b > 0$  нет. В связи с чем оптимальную оценку погрешности для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье итерационный метод неявного типа найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, технике, системах автоматической обработки результатов, математической экономике, геофизике, теории потенциала, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, сейсмике, акустике, спектроскопии (космических исследованиях) и медицине (компьютерной томографии).

В гильбертовом пространстве  $H$  исследуется операторное уравнение I рода

$$Ax = y_\delta, \quad (1)$$

где  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ,  $A$  – неограниченный линейный самосопряженный оператор, для которого 0 не является собственным значением, однако  $0 \in SpA$ , и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна. Пусть при точной правой части  $y$  уравнение (1) имеет единственное решение  $x$ . Для отыскания этого решения предлагается неявный итерационный метод

$$(A^{2k} + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^{2k-1}y_\delta, x_{0,\delta} = 0, k \in N. \quad (2)$$

Здесь  $B$  – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве  $B$  возьмем оператор  $B = bE$ ,  $b > 0$ ,  $E$  – тождественный оператор.

Изучим сходимость метода (2) в энергетической норме гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , где  $x \in H$ . Справедлива

**Теорема.** При условии  $b > 0$  итерационный метод (2) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $n^{1/(4k)}\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Для метода (2) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{b}{8kn}\right)^{1/(4k)} \|x\| + (2k)^{1/2} \left(\frac{n}{b}\right)^{1/(4k)} \delta, \quad n \geq 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{(10k-3)/(8k)} k^{(2k-1)/(8k)} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}$$

и  $n_{\text{опт}} = 2^{-(2k+3)/2} k^{-(2k+1)/2} b \delta^{-2k} \|x\|^{2k}$ .

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (2) и априорный момент останова  $n_{\text{опт}}$  без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (2) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения  $x$  уравнения (1).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства  $H$ . Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном  $\varepsilon$ ,  $(0 < \varepsilon < \|A\|)$  было:  $P_\varepsilon x = 0$ ,  $P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ , где  $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$ . Так как  $x_{n,\delta} = A^{-1} [E - B^n (A^{2k} + B)^{-n}] y_\delta$ , то для выполнения последнего из указанных условий должно выполняться условие  $P_\varepsilon y_\delta = 0$ .

Таким образом, если решение  $x$  и приближенная правая часть  $y_\delta$  таковы, что  $P_\varepsilon x = 0$  и  $P_\varepsilon y_\delta = 0$ , то из сходимости  $x_{n,\delta}$  к  $x$  в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства  $H$ .

### Литература

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
2. Матысик, О. В. Регуляризующие алгоритмы для некорректных операторных уравнений первого рода / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2025. – 256 с.
3. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СКОШЕННЫЕ $\mu$ -ГАНКЕЛЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

А.Р. Миротин, Е.Ю. Кузьменкова

В работе [1] авторами были введены и исследовались два типа операторов, действующих в гильбертовых пространствах, которые обобщают как класс  $\mu$ -ганкелевых операторов [2], так и известный класс скошенных ганкелевых операторов. Доклад посвящен

применению полученных в [1] результатов к интегральным операторам в пространстве Харди.

Пусть  $\mu$  — комплексное число,  $\gamma = \{\gamma_j\}_{j \geq 0}$ ,  $\delta = \{\delta_j\}_{j \geq 0}$  — последовательности комплексных чисел,  $p \in \mathbb{N}$ , и пусть  $\mathcal{H}$  — сепарабельное гильбертово пространство.

**Определение 1** [1]. Оператор  $C$  в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  назовем *скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа  $[C]$* , если для некоторого ортонормированного базиса  $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$  матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$c_{jk} = \mu^j \gamma_{pk+j}. \quad (1)$$

Операторы, удовлетворяющие определению 1, будем обозначать  $C_{\mu, \gamma, p}$ .

**Определение 2** [1]. Оператор  $D$  в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  назовем *скошенным  $\mu$ -ганкелевым типа  $[D]$* , если для некоторого ортонормированного базиса  $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$  матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$d_{jk} = \mu^j \delta_{k+pj}. \quad (2)$$

Операторы, удовлетворяющие определению 2, будем обозначать также  $D_{\mu, \delta, p}$ .

Напомним, что *пространство Харди  $H^2(\mathbb{D})$*  состоит из таких функций  $f$ , аналитических в открытом единичном круге  $\mathbb{D}$  комплексной плоскости, для которых последовательность  $(f_n)$  их тейлоровских коэффициентов в нуле принадлежит пространству  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ . Это сепарабельное гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} f_j \overline{g_j}.$$

Последовательность мономов  $e_k(z) = z^k$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ) образует ортонормированный базис пространства  $H^2(\mathbb{D})$ .

Далее будут рассмотрены классы интегральных операторов в пространстве Харди, являющихся операторами типа  $[C]$  и  $[D]$ .

Всюду ниже  $\sigma$  обозначает ограниченную положительную меру на  $\mathbb{D}$ , а

$$\rho_n := \int_{\mathbb{D}} \zeta^n d\sigma(\zeta) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

— последовательность моментов меры  $\sigma$ .

Рассмотрим следующий оператор в пространстве  $H^2(\mathbb{D})$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

$$(Hf)(z) = (H_{\mu, \sigma, p}f)(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta^p)}{1 - \mu\zeta z} d\sigma(\zeta) \quad (|z| < 1).$$

Этот оператор принадлежит классу хаусдорфовых операторов с ядром, зависящим от внешней переменной, введенному в [3].

**Теорема 1.** Пусть  $|\mu| < 1$ . Для того чтобы оператор  $H_{\mu, \sigma, p}$  был ограничен в пространстве  $H^2(\mathbb{D})$  необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sup_k \sum_j |\mu^j \rho_{kp+j}|^2 < \infty. \quad (3)$$

При условии (3) справедливы следующие утверждения.

1)

$$H_{\mu,\sigma,p} = C_{\mu,\rho,p}.$$

2) Оператор  $H_{\mu,\sigma,p}$  ограничен в пространстве  $H^2(\mathbb{D})$ , если и только если последовательность  $(\rho_n)$  принадлежит  $\ell^2$ . При этом условии он принадлежит классу Гильберта-Шмидта и является ядерным, причем

$$\|H\|_{S_2} \leq \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1 - |\mu\zeta|)(1 - |\zeta|^p)},$$

$$\operatorname{tr} H = \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{1 - \mu\zeta^{p+1}}.$$

Рассмотрим также следующий оператор в пространстве  $H^2(\mathbb{D})$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

$$(\Gamma f)(z) = (\Gamma_{\nu,\sigma,p} f)(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1 - \nu\zeta^p z} d\sigma(\zeta) \quad (|z| < 1).$$

**Теорема 2.** Пусть  $|\nu| < 1$ . Для того чтобы оператор  $\Gamma_{\nu,\sigma,p}$  был ограничен в пространстве  $H^2(\mathbb{D})$  необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sup_k \sum_j |\nu^j \rho_{k+pj}|^2 < \infty. \quad (4)$$

При условии (4) справедливы следующие утверждения.

1)

$$\Gamma_{\nu,\sigma,p} = D_{\nu,\delta,p}.$$

2) Оператор  $\Gamma_{\nu,\sigma,p}$  ограничен в пространстве  $H^2(\mathbb{D})$ , если и только если последовательность  $(\nu^{-2n/p} \rho_n) \in \ell^2$ . При этом условии он также принадлежит классу Гильберта-Шмидта и является ядерным, и

$$\|\Gamma\|_{S_2} \leq \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1 - |\nu||\zeta|^p)(1 - |\zeta|)},$$

$$\operatorname{tr} \Gamma = \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{1 - \nu\zeta^{p+1}}.$$

В заключение отметим, что скошенные  $\mu$ -ганкелевы операторы других типов были рассмотрены в [4].

### Литература

1. Миротин, А. Р. О двух типах скошенных  $\mu$ -ганкелевых операторов в гильбертовых пространствах / А. Р. Миротин, Е. Ю. Кузьменкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1(66). – С. 84–90. DOI: <https://doi.org/10.54341/20778708-2026-1-66-84>.
2. Mirotin, A. R.  $\mu$ -Hankel operators on Hilbert spaces / A. R. Mirotin, E. Yu. Kuzmenkova // Opuscula Math. – 2021. – Vol. 41, no 6. – P. 881–898.
3. Mirotin, A. R.  $L^q - L^p$  boundedness of generic Hausdorff-type operators with bi-variable kernels / A. R. Mirotin // J Math Sci. – 2025. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-0025-08016-4>.
4. Кузьменкова, Е. Ю. Скошенные  $\mu$ -ганкелевы операторы в гильбертовых пространствах / Е. Ю. Кузьменкова // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. – 2026. – Т. 16, № 1. – С. 35–42.

# ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.О. Нуржанов, А.О. Нуржанова

Рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \int_0^t \varphi(t, s, y(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$Ay(0) + By(T) = g(y(0), y(T)), \quad (2)$$

где  $f : [0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi : [0, T] \times [0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $A, B$  — постоянные  $(n \times n)$ -мерные матрицы, причем  $\det B \neq 0$ ;  $g : G \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $G \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутая ограниченная область  $\mathbb{R}^n$ .

Предположим, что вектор-функции  $f(t, y)$ ,  $\varphi(t, s, y)$  и  $g(u, v)$  определены и непрерывны в области  $(t, s, y, u, v) \in [0, T] \times [0, T] \times G \times G \times G$ , кроме того, вектор-функции  $f(t, y)$  и  $\varphi(t, s, y)$  удовлетворяют условию Липшица по переменной  $y$ .

Для исследования решений краевой задачи (1), (2) мы используем численно-аналитический метод последовательных приближений А.М. Самойленко [1, 2].

С этой целью, следуя работе [3], в краевой задаче (1), (2) сделаем замену переменных

$$y(t) = x(t) + w, \quad (3)$$

где  $w \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  — некоторый неизвестный параметр.

Тогда краевая задача (1), (2) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t) + w) + \int_0^t \varphi(t, s, x(s) + w) ds, \quad (4)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = g(x(0) + w, x(T) + w) - (A + B)w. \quad (5)$$

Полученная задача (4), (5) рассматривается в области  $(t, s, x) \in [0, T] \times D \times G_1$ . Неизвестный параметр  $w$  определим из дополнительного уравнения

$$g(x(0) + w, x(T) + w) - (A + B)w = 0. \quad (6)$$

Таким образом, заданная краевая задача (1), (2) является эквивалентной системе (4), (5), (6). С другой стороны, систему (4), (5) можно рассматривать как семейство задач

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t) + w) + \int_0^t \varphi(t, s, x(s) + w) ds, \quad (7)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = 0, \quad (8)$$

где  $w$  — параметр.

Для построения решений краевой задачи (7), (8) применяется алгоритм численно-аналитического метода, согласно которому последовательные приближения  $x_m(t, w, x_0)$  находятся из уравнений

$$x_{m+1}(t, w, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[ f(\tau, x_m(\tau, w, x_0) + w) + \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, w, x_0) + w) ds \right] d\tau - \\ - \frac{t}{T} \int_0^T \left[ f(\tau, x_m(\tau, w, x_0) + w) + \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x_m(s, w, x_0) + w) ds \right] d\tau - \frac{t}{T} [B^{-1}A + E]x_0, \quad (9)$$

где  $m = 0, 1, \dots$  и  $x_0(t, w, x_0) = x_0$ ,  $E$  —  $(n \times n)$ -мерная единичная матрица. Легко видеть, что все члены последовательности (9) удовлетворяют условию (8). Кроме того,  $x_m(0, w, x_0) = x_0$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ .

В работе получены условия сходимости последовательности (9) к предельной функции  $x^*(t, w, x_0)$  и изучены связи этой функции с точным решением краевой задачи (1), (2).

При этом начальное значение  $x_0 = x_0^*$  решения краевой задачи (1), (2) и значение параметра  $w = w^*$  определяются из системы определяющих уравнений

$$[B^{-1}A + E]x_0 + \int_0^T \left[ f(\tau, x^*(\tau, w, x_0) + w) + \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x^*(s, w, x_0) + w) ds \right] d\tau = 0,$$

$$g(x_0 + w, -B^{-1}Ax_0 + w) - (A + B)w = 0,$$

где  $x^*(t, w, x_0)$  — предел последовательности (9).

### Литература

1. Самойленко, А. М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — Киев : Наукова думка, 1992.
2. Ronto, M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems / M. Ronto, A. M. Samoilenko. — River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 2000.
3. Ronto, A. On the investigation of some boundary value problems with non-linear conditions / A. Ronto, M. Ronto // Miskolc Mathematical Notes, 2000, 1(1). — P. 43–55.

## О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ К СИНГУЛЯРНОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ

Ю.С. Солиев

Рассмотрим понимаемый в смысле главного значения по Коши сингулярный интеграл

$$If = I(f; x) = \int_{-1}^1 p(t) \frac{f(t)}{t - x} dt, \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

где  $p(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ , а  $f(x)$  — заданная плотность интеграла.

Пусть ниже  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ,  $L_n f = L_n(f; x, K)$  — полином Лагранжа [1] степени  $n$  по системе узлов  $K = \{x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, k = \overline{0, n}\}$  — экстремальных точек полинома Чебышева  $T_n(x) = \cos n \arccos x, n \geq 2$ .

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом  $L_n f$ , получим квадратурную формулу

$$If = I(L_n f; x, K) + R_n f = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n''} \frac{(-1)^k (1 - x_k^2) - (1 - x^2) T_n(x)}{x - x_k} f(x_k) + R_n f, \quad (2)$$

где два штриха у знака суммы означает, что слагаемые при  $k = 0$  и  $k = n$  следует разделить на 2, а  $R_n f = R_n(f; x)$  — остаточный член.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in H_\mu^{(r)}(M; [-1, 1])$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка  $\|R_n f\|_C = O(n^{-r-\mu} \ln^2 n)$ .

Через  $H_{2n+1} f = H_{2n+1}(f; x)$  обозначим полином Эрмита [2] степени  $2n + 1$ , удовлетворяющий условиям  $H_{2n+1}(f; x_k) = f(x_k)$ ,  $H'_{n,m}(f; x_k) = f'(x_k)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , по системе узлов  $K$ . Тогда

$$\begin{aligned} If &= I(H_{2n+1} f; x, K) + R_n f = \\ &= \sum_{k=0}^n (A_k(x) f(x_k) + B_k(x) f'(x_k)) + R_n f, \quad (3) \\ A_0(x) &= \frac{\pi}{4n^2} \left( \frac{x+2}{2} - (x+1)^2 U_{2n-1}(x) - \frac{n^2 + 3n + 3}{6} K_n(x) \right), \\ K_n(x) &= \frac{1}{4} + \frac{x^2 + x - 1}{2} - (x^3 + x^2 - x - 1) U_{2n-1}(x), \\ A_n(x) &= \frac{\pi}{4n^2} \left( \frac{x+2}{2} - (x+1)^2 U_{2n-1}(x) + \frac{n^2 + 3n + 3}{6} S_n(x) \right), \\ S_n(x) &= \frac{1}{4} + \frac{x^2 - x - 1}{2} - (x^3 - x^2 - x + 1) U_{2n-1}(x), \\ A_k(x) &= \frac{\pi}{n^2} \left( \frac{x_k}{1 - x_k^2} Y_n(x, x_k) - \frac{1 - x^2}{(x - x_k)^2} U_{2n-1}(x) - \frac{2n}{x - x_k} \right), \\ B_0(x) &= \frac{\pi}{4n^2} K_n(x), B_n(x) = \frac{\pi}{4n^2} S_n(x), \\ B_k(x) &= \frac{\pi}{n^2} Y_n(x, x_k), Y_n(x, x_k) = \frac{1}{2} - \frac{1 - x^2}{x - x_k} U_{2n-1}(x), k = \overline{1, n-1}, \\ U_n(x) &= \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Используя методику работы [2], доказывается

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in H_\mu^{(r)}(M; [-1, 1])$ ,  $r \geq 1$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка  $\|R_n f\|_C = O(n^{-r-\mu-1} \ln n)$ .

Аналогично строится квадратурная формула с кратными узлами по системе узлов — нулей полинома  $(1-x)W_{n-1}(x)$ , где  $W_{n-1}(x)$  — полином Чебышева четвертого рода, причем для полученной квадратурной формулы теорема 2 сохраняется.

### Литература

1. Турецкий А.Х. Теория интерполирования в задачах. — Минск, 1968. — 320 с.
2. Berriochoa E., Cachafeiro A., Díaz J., Martínez E. A note on the rate of convergence for Chebyshev-Lobatto and Radau systems // Open Math. — 2016. — Vol. 14. — P. 156–166.

## CAUCHY PROBLEM FOR A FRACTIONAL DIFFUSION-WAVE EQUATION WITH A LOADED TERM IN THE FORM OF A RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

M.T. Kosmakova, D.M. Akhmanova

In the domain

$$\Omega = \{(x, t) | -\infty < x < +\infty; t > 0\}$$

find a solution to the loaded equation [1, 2]:

$$D_{0t}^{\alpha}u = u_{xx} + \lambda D_{0x}^{\beta}u|_{x=\gamma(t)} + f(x, t), \quad (1)$$

which satisfies the conditions:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u = 0; \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2}u = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0; \quad (2)$$

$$\alpha \in (1; 2); \quad \beta \in (0; 1),$$

where  $D_{0y}^{\nu}f(y)$  is a Riemann-Liouville fractional derivative of an order  $\nu \in R$  [3] (if  $\nu \leq 0$ , then  $D_{0y}^{\nu}f(y)$  is a Riemann-Liouville integral),  $\lambda$  is a complex parameter,  $\gamma(t)$  is a non-negative increasing function,  $\gamma(0) = 0$ .

The solution to the problem can be written as:

$$u(x, t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^t I(\alpha; t - \tau)(t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t)$$

Here

$$f_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -|x - \xi|(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

where

$$I(\alpha; t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -|x - \xi|(t - \tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) d\xi,$$

where

$$\phi(\lambda, \mu; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\lambda n + \mu)}, \quad \lambda > -1, \quad \mu \in C,$$

is the Wright function. For the loaded term, the notation is introduced

$$\mu(t) = D_{0t}^\beta u(x, t)|_{x=\gamma(t)}$$

The theorem has been proven

**Theorem 1.** *Let  $\alpha \in (1; 2)$ ;  $\beta \in (0; 1)$ ,  $t^{1-\beta}f(x, t) \in C(\Omega)$ . Then there is a unique solution to the equation (1) in the domain  $\Omega$ , which satisfies the condition (2) and has a representation in the form:*

$$u(x, t) = \lambda(t^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta, \alpha}(\lambda t^{\alpha-\beta})) * f_2(t) + f_1(x, t) \quad (3)$$

where  $f_2(t)$  and  $f_1(x, t)$  are determined by the formulas:

$$f_1(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1} \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}; -|r-\xi|(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (4)$$

$$f_2(t) = D_{0t}^\beta f_1(x, t)|_{x=\gamma(t)}$$

**Remark 1.** According to the conditions of the theorem, problem (1)–(2) has a unique solution, defined by formula (3). Therefore, the loaded term is a weak perturbation for  $\beta \in (0; 1)$ .

Now in the domain  $\Omega$  consider the BVP for the equation

$$D_{0t}^\alpha u = u_{xx} + \lambda D_{0x}^\beta u|_{x=\gamma(t)} + f(x, t), \quad (5)$$

with the conditions (2).

Problem (5), (2) is reduced to the Volterra integral equation of the second kind:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{\alpha, \beta}(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t)$$

where

$$K_{\alpha, \beta}(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)(\gamma(t))^\beta}, \quad \alpha \in (1; 2), \quad \beta \in (0; 1), \quad (6)$$

$f_2(t)$  is determined by the formula (4) and:

$$f_2(t) = D_{0x}^\beta f_1(x, t)|_{x=\gamma(t)}.$$

Let us consider the corresponding homogeneous equation:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{\alpha, \beta}(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

The theorem has been proven.

**Theorem 2.** *The number*

$$\lambda = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\nu+1+\alpha)}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu > -1, \quad \beta \in (0; 1), \quad \alpha \in (1; 2).$$

is the characteristic number of the integral equation (7) with the kernel (6), and the function  $\mu(t) = t^\nu$ ;  $\nu \in R$ , is the corresponding eigenfunction if  $\gamma(t) = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$ .

Then the solution of the homogeneous problem

$$D_{0t}^\alpha u = u_{xx} + \lambda D_{0x}^\beta u|_{x=\gamma(t)}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2} u = 0,$$

has the form  $u(x, t) = \Gamma(1 - \beta)t^{\nu+\alpha}$ ;  $\nu > -1$ .

**Funding:** This work was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP23488740, 2024–2026).

### References

1. Nakhushev, A. M. Loaded equations and their application / A. M. Nakhushev. – Moscow : Nauka, 2012.
2. Pskhu, A. V., Ramazanov, M. I., & Kosmakova, M. N. Boundary value problem for a loaded fractional diffusion equation / A. V. Pskhu, M. I. Ramazanov, M. N. Kosmakova // Turkish Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 47, № 5. – P. 1585–1594. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3450>
3. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier, 2006.

## MULTI-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORMS WITH THE LEGENDRE FUNCTION IN THE KERNEL IN LEBESGUE-TYPE SPACES

O.V. Skoromnik

The report is devoted to the study of the multi-dimensional integral transforms:

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (1)$$

$$(P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^\infty (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (2)$$

$$(P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^\infty (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (3)$$

$$(P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0). \quad (4)$$

Here (see, for example, [1], [2] Section 28.4; [3], ch. 1; [4]; [5])  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  – Euclidean  $n$ -space; the expression  $\mathbf{x} \geq \mathbf{t}$  means  $x_1 \geq t_1, x_2 \geq t_2, \dots, x_n \geq t_n$ ;  $d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_n$ ;  $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $0 < \gamma < 1$ ;

$(\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} = \prod_{j=1}^n (x_j^2 - t_j^2)^{-\gamma_j/2}$ ;  $\int_0^{\mathbf{x}} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n}$ ;  $P_\delta^\gamma[\mathbf{z}]$  is a function of the form [6; 7]:

$P_\delta^\gamma[\mathbf{z}] = \prod_{k=1}^n P_{\delta_k}^{\gamma_k}[z_k]$ , where  $P_{\delta_k}^{\gamma_k}[z_k]$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) are the Legendre functions of the first kind.

The report is devoted to the study of transforms (1)–(4) in the weighted spaces  $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\gamma}}$  summable functions  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  on  $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0\}$ , such that

$$\|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \right. \right. \right. \\ \left. \times \left[ \int_{R_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \left. \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \Big\}^{1/r_n} < \infty \quad (5)$$

$(\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n, 1 \leq \bar{r} < \infty, \bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n, \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n).$

The functional properties of the integral transformations (1)–(4) in spaces

$$\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}(\bar{2} = (2, 2, \dots, 2), \bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n, \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n)$$

were studied in [7]. We continue this research. Conditions are obtained for the boundedness and one-to-oneness of the operators of such transformations from one spaces (5) of integrable functions  $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$  to others, and analogs of the formula for integration by parts are proved. For the transformations under consideration, various integral representations are established and inversion formulas are derived.

### References

1. Brychkov Y.A., Glaeske H.J., Prudnikov A.P., Tuan V.K. Multidimensional Integral Transformations. Gordon and Breach, Philadelphia, 1992.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, London, 1993.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier Science, Amsterdam, 2006.–523 p.
4. Sitnik S.M., Skoromnik O.V., Shlapakov S.A. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022, **43**, № 6. 1170–1178.
5. Sitnik S.M., Skoromnik O.V. Multi-Dimensional Integral Transform with Fox Function in Kernel in Lebesgue-Type Spaces. Mathematics. 2024, 12, 1829.
6. Skoromnik O. V. Integral transforms with Gauss and Legendre functions as kernels and integral equations of the first kind. Belorussia, Polotsk State University Novopolotsk, 2019. – 180 pp. [in Russian]
7. Sitnik S.M., Skoromnik O.V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre Functions in kernels, In the book: Kravchenko Vladislav, Sitnik Sergei M. (Eds.) Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. 2020, Birkhauser Basel, Springer Nature Switzerland AG, Basel. 293–319.

## SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF THE ONE-MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG FERROMAGNET WITH IMPURITY AND NEAREST NEIGHBOR INTERACTIONS AND WITH ONE-ION ANISOTROPII

S.M. Tashpulatov

In the work [1] we considering one-magnon states in an isotropic ferromagnetic Heisenberg impurity model. We find how of the local impurity states (LISs), their energies, the degeneracy multiplicities of the related energy levels, and LIS domains of existence change with varying parameters of the Hamiltonian. Here we consider of the energy operator of one-magnon system in the ferromagnetic Heisenberg impurity model with one-ion anisotropy in the lattice.

Hamiltonian of the considering system has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) + H \sum_m S_m^z + (J_0 - J) \sum_\tau (\vec{S}_0 \vec{S}_\tau) + (H_0 - H) S_0^z, \quad (1)$$

where  $J < 0$  is the parameter of the bilinear exchange interaction between the for nearest-neighbor atoms in the lattice,  $J_0$  is the atom-impurity exchange interaction parameter, the summation over  $\tau$  ranges the nearest-neighbors, and  $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$  is the atomic spin operator for the spin  $s = 1/2$  at the lattice site  $m$ . We set  $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$ , where  $S_m^-$  and  $S_m^+$  are the corresponding magnon creation and annihilation operators at the site  $m$ , and  $H$  ( $H_0$ ) are the parameters one-ion anisotropy. Hamiltonian (1) acts in the summetric Fock space  $\mathcal{H}$ . We let  $\varphi_0$  denote the co-called vacuum vector uniquely determined by the conditions  $S_m^+ \varphi_0 = 0$ ,  $S_m^z \varphi_0 = (1/2)\varphi_0$ , where  $\|\varphi_0\| = 1$ . The vectors  $\{S_m^- \varphi_0\}$  describes the state of the system of one-magnon with the spin  $s = 1/2$  located at the site  $m$ . The closure of the space spanned by these vectors is denoted by  $\tilde{\mathcal{H}}_1$ . It is a Euclidian space with respect to the natural inner product and is called a space of one-magnon states. We denote by  $H_1$  the restriction of operator  $H$  in the subspace  $\tilde{\mathcal{H}}_1$ .

**Theorem 1.** *The space  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  is invariant with respect to the operator  $H$ . The operator  $H_1$  is a bounded self-adjoint operator generating a bounded self-adjoint operator  $\bar{H}_1$ , acting in the space  $l_2(Z^\nu)$  according to the formula*

$$(\bar{H}_1 f)(p) = J \sum_\tau \left\{ -f(p) + \frac{1}{2}f(p-\tau) + \frac{1}{2}f(p+\tau) \right\} + (J_0 - J) \sum_\tau \{ \delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau) + (-\delta_{p,\tau} - \delta_{p,0}) f(p) \} - H f(p) - (H_0 - H) \delta_{p,0} f(p), \quad (2)$$

where  $\delta_{k,j}$  — is the Kronecker delta. The operator  $H_1$  acts in the vector  $\psi \in \tilde{\mathcal{H}}_1$  according to the formula

$$H_1 \psi = \sum_p (\bar{H}_1 f)(p) S_p^- \varphi_0. \quad (3)$$

Using the Weyl criterion [2], we proved the coincides of the spectrum of operators  $H_1$  and  $\bar{H}_1$ . Let  $\mathcal{F}$  denote the Fourier transform  $\mathcal{F} : l_2(Z^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu)$ . Here  $T^\nu$  —  $\nu$ -dimensional torus endowed with normalized Lebesgue measure  $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$ .

**Theorem 2.** *Let  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_1 \equiv L_2(T^\nu)$  — Fourier transform. The Fourier transform of operator  $\bar{H}_1$  is an operator  $\tilde{H}_1 = \mathcal{F} \bar{H}_1 \mathcal{F}^{-1}$  acting the space  $L_2(T^\nu)$  by the formula*

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = h(x) f(x) + \int_{T^\nu} h_1(x, t) f(t) dt, \quad (4)$$

where  $h(x) = -2J\nu + 2J \sum_{i=1}^\nu \cos x_i - H$ ,  $h_1(x, t) = -2\varepsilon_1 \{ \nu + \sum_{i=1}^\nu [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i] \} - \varepsilon_2$ , here  $\varepsilon_1 = J_0 - J$ ,  $\varepsilon_2 = H_0 - H$ ,  $x, t \in T^\nu$ .

It is clear that the continuous spectrum of operator  $\tilde{H}_1$  is independent of functions  $h_1(x, t)$  and fills the whole closed interval  $[m_\nu, M_\nu]$ , where  $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x, t)$ ,  $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x, t)$ .

**Definition 1.** An eigenfunction  $\varphi \in L_2(T^\nu)$  of operator  $\tilde{H}_1$  corresponding to an eigenvalue  $z \notin [m_\nu, M_\nu]$ , is called a local impurity states (LIS) of operator  $\tilde{H}_1$ , and  $z$  is called the energy of this state.

We denote

$$\begin{aligned} \Delta_1(z) = & \left\{ \left( 1 + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\cos s(1 - \cos s)ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z} \right) \left( 1 - \int_{T^\nu} \frac{2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \right) + \right. \\ & + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{1 - \cos s}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \int_T \frac{\cos s[2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2]}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \Big\} \times \\ & \times \left( 1 - 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\sin^2 s ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

**Lemma 1.** *A number  $z = z_0 \notin [m_\nu, M_\nu]$  is an eigenvalue of operator  $\tilde{H}_1$  if and only if it is a zero of the function  $\Delta_1(z)$ , i.e.  $\Delta_1(z_0) = 0$ .*

Now we solve the equation  $\Delta_1(z) = 0$ . This equation is equivalent next system of equations:

$$1 - 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\sin^2 s ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z} = 0, \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} & \left( 1 + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{\cos s(1 - \cos s)ds}{-2J(1 - \cos s) - H - z} \right) \left( 1 - \int_{T^\nu} \frac{2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \right) + \\ & + 2\varepsilon_1 \int_T \frac{1 - \cos s}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds \int_T \frac{\cos s[2\varepsilon_1(1 - \cos s) + \varepsilon_2]}{-2J(1 - \cos s) - H - z} ds = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

The equation (6) has the solution of the form  $z = -H - \frac{(J+\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1}$ . This solutions lie the below of continuous spectrum of operator  $\tilde{H}_1$ , if  $\varepsilon_1 > 0$ . Expressing all integrals through the integral  $J^*(z) = \int_T \frac{ds}{-2J(1-\cos s)-H-z}$  we have the equation of the form

$$J^*(z) = -\frac{2J^2 + 2J\varepsilon_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1(z + H)}{-2J^2\varepsilon_1 - \varepsilon_1(z + H)^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2(z + H + 2J)}. \quad (8)$$

In the one-dimensional case, the integral  $J^*(z) = \int_T \frac{ds}{-2J(1-\cos s)-H-z}$  is calculated in a quadrature, calculated a integral  $J^*(z)$  in a quadrature, substituting the value of this integrals in a equation (8) and solving equation (8), convince what, the equation (8) has a no more than two solutions.

**Theorem 3.** *Let  $\nu = 1$ . Then the operator  $\tilde{H}_1$  has three types LISs  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  with the energy values correspondingly to equal  $z_1 = -H - \frac{(J+\varepsilon_1)^2}{\varepsilon_1}$ ,  $z = z_2, z = z_3$ , lying the outside of continuous spectrum of the operator  $\tilde{H}_1$ , where  $z = z_2, z = z_3$  are the solutions of equation (8).*

## References

1. Tashpulatov, S. M. Spectra and Localized Impurity States of One-Magnon Systems in the Heisenberg Isotropic Ferromagnetic Impurity Model // Theoretical and Mathematical Physics. – 2001. – Vol. 126, No. 3. – P. 403–408.
2. Reed S., and Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1. Functional Analysis. New York: Acad. Press, 1972. – 360 p.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.Г. Абрашина-Жадаева

**Введение.** В данном сообщении, обсуждаются алгоритмы численного решения задач математической физики, допускающих организацию параллельных вычислений на примере задач, возникающих в теории влагопереноса, а также моделях с волновым уравнением с учетом вязкости и теплопроводности [1], [2]. Общий подход построения такого класса схем можно найти в [3]-[5] и в списке цитируемой там литературы. Исследована корректность метода построения разностных задач в классе достаточно гладких решений рассматриваемых уравнений, подробные доказательства можно найти, например, в [4], [5]. Векторные аддитивные схемы [2-7], оказываются более приемлемые, для названного класса задач. Главный результат, который приводим, состоит в построении трехслойных устойчивых схем, для уравнений гиперболического типа в неидеальной среде со смешанными производными вида  $u_{xxt}$ .

**Постановка задачи.** В некотором гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим абстрактные задачи Коши двух видов с линейным самосопряженным положительно определенным оператором, с дифференциальным оператором вида:

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} (K_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}).$$

Следуя [2]-[5], строим разностные схемы:

$$\partial_{0t}^{\gamma} u + A(u + \frac{\partial u}{\partial t}) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0. \quad (1)$$

При

$$\gamma = 1, \quad u(0) = u_0, \quad \gamma = 2, \quad u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \quad (2)$$

Здесь  $0 < c_1 \leq K_{\alpha} \leq c_2$ . В [5] рассмотрены алгоритмы при  $\partial_{0t}^{\gamma} u$  – дробная производная в смысле Герасимова-Капуто (см. например, [6], [7]).

**Многокомпонентные векторные схемы.** Аддитивное представление оператора  $A$  лежит в основе большинства экономичных методов [2] и на этом же принципе конструируются и многокомпонентные схемы расщепления [3, 4]. Такое представление позволяет свести решение задачи (1) к решению  $p$  компонентной задачи в векторном пространстве  $H^p$ . Поэтому и в сложных моделях задач математической физики с уравнениями в частных производных, аналогично [3]-[5] вместо одного скалярного решения  $u(t) \in H$  ищем вектор-функцию  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \in H^p$ ,  $u_{\alpha}(t) \in H$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$  как решение соответствующей системы уравнений.

Используем обозначения из [2] и вводим на отрезке интегрирования  $0 < t < T$  сеточную область  $\omega_{\tau} = (t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots)$  и обозначая через  $y^j = y(t_j)$  – сеточную функцию и полагая, что решение  $u(t)$  обладает необходимой гладкостью, предлагаем класс разностных схем, обладающих распараллеленной реализацией вычислений. При  $\gamma = 1$ :

$$\frac{\tilde{y}_\alpha - \tilde{y}}{\tau} + \sigma A_\alpha(\tilde{y}_\alpha + y_{\alpha t}) - \sigma A_\alpha(y_\alpha + \tilde{y}_{\alpha t}) + \sum_{\beta=1}^p A_\beta(y_\beta + \tilde{y}_{\beta t}) = \varphi^*, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (3)$$

$$\sigma \geq 0,5, \quad \tilde{y} = \frac{1}{p} \sum_{\beta=1}^p A_\beta(y_\beta), \quad y_\alpha(0) = y_0.$$

При  $\gamma = 2$ :

$$y_{\alpha \bar{t} t} + \tau^2 \sigma A_\alpha y_{\alpha \bar{t} t} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta y_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^p A_\beta \bar{y}_{\beta t} = \varphi^*, \quad \alpha = \overline{1, p}, \quad (4)$$

причем начальные условия аппроксимируем согласно [2], например, как на стр. 97. В (3) или (4) для любого  $\alpha = 1, \dots, p$  на каждом временном шаге приближенное решение вычисляется отдельно, что дает, несомненно, выигрыш при вычислениях на многопроцессорных вычислительных системах.

**Теорема.** Разностная схема (4) безусловна устойчива при  $\sigma > p/4$  и при достаточной гладкости решения исходной задачи сходится со скоростью  $O(|h|^2 + \tau)$ .

Отметим, что в случае рассмотрения задач в случае присутствия в основном уравнении дробной производной по времени не вносит практических трудностей. Опираясь на результаты работ [6], [7], аналогичным образом строятся алгоритмы с соответствующей аппроксимацией дробной производной по времени. Так же как и при  $\gamma = 1$  в результате получаем  $p$ -значений решений в каждой точке области. Каждая из компонент решения сходится к решению исходной задачи при любой размерности и без требования перестановочности пространственных операторов. В качестве приближенного решения обычно берут  $y_p$  или  $y = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^p y_\alpha$ . Выбор решения обсуждается в [4].

**Заключение.** Эффективность предложенных алгоритмов проверялась на примере решения первой краевой задачи для дву- и трехмерных уравнений, подтверждены выводы теоремы, причем влияние весового параметра  $\sigma$  существенно. Аналогичные схемы можно построить для задач данного типа в областях с криволинейной границей, следуя [8], а так же декомпозиционные методы, см. например, [4], [9].

### Литература

1. Чудинов А. Ф. Теплофизика почвы. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М., 1989. – 656 с.
3. Абрашин В. Н. Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики // Дифференциальные уравнения. – 1990. – № 26, № 2. – С. 311–323.
4. Абрашина-Жадаева Н. Г. Векторные адитивные схемы для задач математической физики. – М.: URSS, 2023. – 200 с.
5. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Совершенствование численных методов расчета задач математической физики с уравнением влагопереноса. // Материалы международного конгресса по информатике: информационные системы и технологии (CSIST'2022). – 2022. – Ч. 2. – С. 304–310.
6. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. № 7. – С. 819–825.
7. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. Многокомпонентные методы для аномальных процессов диффузии // Труды 1-ого международного семинара АМАДЕ-2021. – 2022. – С. 5–11.
8. Абрашин В. Н., Жадаева Н. Г. Разностные схемы для задач математической физики в области произвольной формы // Дифференциальные уравнения и их применение. – Вильнюс, 1988. – Вып. 43. С. 22–30.

9. Абрашина-Жадаева Н. Г., Тимощенко И. А. Метод декомпозиции области в задачах математической физики для аномальных процессов диффузии // Международная конференция «Понтрягинские чтения – XXIX» Москва, 02–06 мая 2018 года, С. 29.30.

## О ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ВЫПУКЛЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА

И.В. Астахова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский

Мы изучаем параболическую экстремальную задачу:

$$u_t = (a(x, t)u_x)_x + b(x, t)u_x + p(x, t)u, \quad (x, t) \in Q_T = (0, 1) \times (0, T), \quad T > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(1, t) = \psi(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $p$  — достаточно гладкие функции на  $\overline{Q}_T$ ,  $0 < a_0 \leq a(x, t)$ ,  $\varphi \in W_2^1(0, T)$ ,  $\psi \in W_2^1(0, T)$ ,  $\xi \in L_2(0, 1)$ . Мы управляем температурой  $\varphi$  на левом конце интервала (при фиксированных функциях  $\psi$ ,  $\xi$ ), и пытаемся минимизировать некоторый функционал, зависящий от  $u(x_0, \cdot)$  (температура в определенной точке  $x_0 \in (0, 1)$  на всем временном интервале  $(0, T)$ ). Эта экстремальная задача с точечным наблюдением (в терминологии [1]) обобщает задачу управления микроклиматом, возникающую в математической модели промышленных теплиц (см. [2, 3]).

В данной работе мы расширяем наше исследование на общий тип выпуклого функционала и более общее уравнение (с переменным коэффициентом  $a$ , конвективным членом  $b$  и обедняющим потенциалом  $p$ ).

**Определение 1.** ([4]) Пространством  $V_2^{1,0}(Q_T)$  называется банахово пространство таких функций  $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$  с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

что  $t \mapsto u(\cdot, t)$  является непрерывным отображением  $[0, T] \rightarrow L_2(0, 1)$ .

**Определение 2.** Множеством  $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$  назовем множество функций  $\eta \in W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющих условиям  $\eta(x, T) = 0$  и  $\eta(0, t) = 0$ .

**Определение 3.** Слабым решением задачи (1) — (3) называется функция  $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющая условию  $u(0, t) = \varphi(t)$  и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (a(x, t)u_x\eta_x - b(x, t)u_x\eta - p(x, t)u\eta - u\eta_t) \, dx \, dt = \\ = \int_0^1 \xi(x)\eta(x, 0) \, dx + \int_0^T a(1, t)\psi(t)\eta(1, t) \, dt \end{aligned}$$

для всех  $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ .

При сделанных выше предположениях каждое слабое решение в  $W_2^{1,0}(Q_T)$  принадлежит  $V_2^{1,0}(Q_T)$  ([4], гл. 3, п. 3).

**Теорема 1.** ([2,3]) *Задача (1) – (3) имеет единственное слабое решение  $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ , и выполняется следующая оценка:*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C_1 (\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}),$$

при этом константа  $C_1$  не зависит от  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\xi$ .

Обозначим через  $u_\varphi$  слабое решение уравнения (1) – (3) с заданной функцией управления  $\varphi \in W_2^1(0, T)$ ,  $\psi \in W_2^1(0, T)$  и  $\xi \in L_2(0, 1)$ .

Пусть  $F : L_2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  — функционал, удовлетворяющий условиям

1.  $F(y) \geq C_1$  для любого  $y \in L_2(0, T)$  и некоторого  $C_1$ ;
2. Отображение  $y \mapsto F(y)$  непрерывно в нуле, то есть для любой такой последовательности  $\{y_k\}$ ,  $y_k \in L_2(0, T)$ , что  $\|y_k\|_{L_2(0,T)} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , мы имеем  $F(y_k) \rightarrow 0$ ;
3.  $F$  строго выпуклая: для любых  $y_1 \neq y_2 \in L_2(0, T)$  и  $\alpha \in (0, 1)$  мы имеем

$$F(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) < \alpha F(y_1) + (1 - \alpha)F(y_2).$$

Качество управления контролируется функционалом

$$J(\varphi) = F(u_\varphi(x_0, \cdot)), \quad x_0 \in (0, 1).$$

Для замкнутого выпуклого множества управлений  $\Phi \subset W_2^1(0, T)$  обозначим его инфимум через  $m(\Phi)$ :

$$m(\Phi) = \inf_{\varphi \in \Phi} J(\varphi).$$

**Теорема 2.** *Пусть  $\Phi$  — ограниченное множество. Тогда существует единственная такая функция  $\varphi_0 \in \Phi$ , что  $m(\Phi) = J(\varphi_0)$ .*

**Теорема 3.** *Если коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $p$  в уравнении (1) не зависят от  $t$ , то*

$$m(W_2^1(0, T)) = \inf_{y \in L_2(0, T)} F(y).$$

Мы изучаем свойства минимизирующей функции  $\varphi_0$  как элемента  $\Phi$ .

**Теорема 4.** *Если коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $p$  в уравнении (1) не зависят от  $t$ ,  $\Phi$  — ограниченное множество и  $m(\Phi) > \inf_{y \in L_2(0, T)} F(y)$ , то  $\varphi_0 \in \partial\Phi$ .*

**Теорема 5.** *Если коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $p$  в уравнении (1) не зависят от  $t$ ,  $\Phi_j$ ,  $j = 1, 2$  являются такими ограниченными замкнутыми выпуклыми множествами в  $W_2^1(0, T)$ , что  $\Phi_2 \subset \text{Int}\Phi_1$  и  $m(\Phi_1) > \inf_{y \in L_2(0, T)} F(y)$ , то  $m(\Phi_1) < m(\Phi_2)$ .*

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 25-11-00133.

### Литература

1. Лионс, Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемые уравнениями с частными производными / Ж. Л. Лионс. — Москва : Мир, 1972.
2. Астапова, И. В., Филиновский, А. В., Лашин, Д. А. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией / И. В. Астапова, А. В. Филиновский, Д. А. Лашин // Труды Моск. матем. общ-ва, 2019. — Т. 80, № 2. — С. 258–274.
3. Астапова, И. В., Лашин, Д. А., Филиновский, А. В. Об экстремальной задаче управления с точечным наблюдением для параболического уравнения / И. В. Астапова, А. В. Филиновский,

Д. А. Лашин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 504, С. 28–31

4. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – Москва : Физматлит, 1973.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СИНТЕЗА МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

**В.Т. Борухов, Г.М. Заяц, О.Ю. Кушель, М.С. Максимов,  
П.С. Кратович, В.С. Волчёр, П.Э. Новиков,  
И.Ю. Ловшенко, Т.А. Письман**

Рассматривается обратная задача синтеза оптимальной структуры для многослойных сред. Математическая модель таких сред представляет собой систему уравнений в частных производных эллиптического типа

$$F(w, w_x, w_{xx}, \alpha) = 0, \quad (1)$$

дополненную краевыми условиями и условиями сопряжения

$$f(w, w_x, \beta) = 0 \quad (2)$$

на границах контакта. Здесь  $w(x)$  – вектор стационарного состояния многослойной среды, вектор  $\gamma = (\alpha, \beta)$  – параметр управления.

Среди приложений модели (1), (2) отметим задачи, связанные с описанием электростатических потенциалов и концентраций электронов и дырок в многослойных полупроводниковых структурах.

Обратная задача состоит в определении оптимального управления  $\gamma^*$ , обеспечивающего минимум функционалу качества многослойной среды. Функционал качества задается нормой невязки между измеряемыми (наблюдаемыми) значениями состояния среды и их требуемыми значениями.

Мы изучаем два подхода для вычисления минимума функционала качества. В первом, на основе метода функциональной идентификации [1, 2], разработан численный алгоритм минимизации функционала качества. Для реализации глобального минимума применялась процедура рандомизации начального приближения в итерационной процедуре алгоритма. Численные эксперименты показали устойчивость результатов вычислений к возмущениям входных данных в системе (1), (2).

Второй подход основан на редукции системы (1), (2) к многозначному конечномерному отображению «вход-выход»

$$S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Отображение  $S$  удобно интерпретировать как бинарное отношение  $S \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  в декартовом произведении  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Задача минимизации функционала качества многослойной среды сводится в этом случае к поиску оптимальных пар в бинарном отношении  $S$ . Для решения задачи применялись различные методы оптимизации [3], в том числе методы прямого поиска Нелдера-Мида и Пауэлла [4,5]; эволюционные алгоритмы: генетические алгоритмы, алгоритм имитации отжига, метод дифференциальной эволюции [6,7]; метод Байесовской оптимизации [8].

Указанные выше подходы к решению обратных задач синтеза оптимальной структуры для многослойных сред были применены для решения задачи оптимизации конструктивных параметров низкобарьерных диодов Шоттки на основе арсенида галлия с целью получения приборной гетероструктуры с повышенными эксплуатационными характеристиками. В результате получены наборы оптимальных входных параметров приборной структуры, реализующие конструкции с заданными характеристиками. Проведен сравнительный анализ методов с точки зрения результата оптимизации и требуемых на выполнение ресурсов.

Работа выполнена в рамках задания 1.07 ГПНИ «Междисциплинарные и синергетические исследования» (Конвергенция-2030) и в рамках отдельного проекта фундаментальных и прикладных научных исследований «Разработка лабораторной технологии изготовления и оптимизация конструктивных решений приборных структур низкобарьерных диодов Шоттки на основе арсенида галлия» (2025–2026 г.г.).

### Литература

1. Борухов, В. Т. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики / В. Т. Борухов, И.В.Гайшун, В.И. Тимошпольский. – Минск : Бел. Наука, 2009. – 174 с.
2. Borukhov, V. The inverse problem of heat conduction in the case of non-uniqueness: A functional identification approach / V. Borukhov, G. Zayats // J. of Inverse and Ill-posed Problems. – 2024. – Vol. 32, iss. 5. – P. 891–902.
3. Larson, Jeffrey. Derivative-free optimization methods / Jeffrey Larson, Matt Menickelly and Stefan M. Wild / arXiv:1904.11585v2 [math.OC]. – 25 Jun 2019.
4. Nelder, J.A. A Simplex Method for Function Minimization / J. A. Nelder, R. Mead // The Computer Journal. – 1965. – Vol. 7, № 4. – P. 308–313.
5. Powell, M.J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives / M. J. D. Powell // The Computer Journal. – 1964. – Vol. 7, № 2. – P. 155–162.
6. Xiang, Y. Generalized Simulated Annealing Algorithm and Its Application to the Thomson Model / V. Xiang, DY Sun, W Fan, XG Gong // Physics Letters A. – 1997. – Vol. 233. – P. 216–220.
7. Storn, R. Differential Evolution—A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces / R. Storn and K. Price // Journal of Global Optimization. – 1997. – Vol. 11. – 341–359.
8. Frazier, P.I. A Tutorial on Bayesian Optimization / P. I. Frazier / arXiv:1807.02811 [stat]. – arXiv, 2018.

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДВУХЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ

Д.В. Валовик, А.А. Дюньдяева, В.Ю. Мартынова

Пусть всюду ниже индекс  $j$  принимает значения 1, 2. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_1''(x) &= (\gamma_1^2 - \varepsilon_1(x) - c_1 \epsilon_1(x)) u_1(x) - (\alpha + c_3 a(x)) u_1^3(x) - c_4 \beta(x) u_1(x) u_2^2(x), \\ u_2''(x) &= (\gamma_2^2 - \varepsilon_2(x) - c_2 \epsilon_2(x)) u_2(x) - (\alpha + c_3 a(x)) u_2^3(x) - c_4 \beta(x) u_2(x) u_1^2(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x \in \bar{I} = [0, h]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $c_j, c_{j+2}$  – вещественные числа,  $\epsilon_j \in C(\bar{I})$ ,  $\epsilon_j, a, \beta \in C^{(1)}(\bar{I})$ , причем  $\epsilon'_j(x) \geq 0$ ,  $\epsilon_j(0) \geq 0$ , и  $\gamma_j \in \mathbb{R}$  – спектральные параметры.

Задача  $\mathcal{P}$  заключается в нахождении таких значений  $\gamma_1, \gamma_2$ , для которых существуют решения  $u_j \in C^2(\bar{I})$  системы (1), удовлетворяющие условиям

$$\sqrt{\gamma_j^2 - \epsilon_s} \cdot u_j(0) - u'_j(0) = 0, \quad u_j(0) = A_j, \quad (2)$$

$$\sqrt{\gamma_j^2 - \epsilon_c} \cdot u_j(h) + u'_j(h) = 0, \quad (3)$$

где  $\epsilon_c, \epsilon_s > 0$ ,  $A_j$  есть некоторые постоянные.

Задача  $\mathcal{P}$  возникает в теории нелинейных оптических волноводов и описывает распространение двух ТЕ-волн, характеризующихся волновыми числами  $\gamma_j$ , в плоском слое, заполненном средой с нелинейными оптическими свойствами. Таким образом две волны влияют друг на друга, образуя единую связанную ТЕ-ТЕ волну [1], характеризующуюся парой постоянных распространения  $(\gamma_1, \gamma_2)$ . С математической точки зрения, задача  $\mathcal{P}$  представляет собой задачу на собственные значения: упорядоченный набор  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$  назовем *векторным собственным значением* (СЗ) задачи  $\mathcal{P}$ . Отметим, что второе из условий (2) обеспечивает дискретность набора решений задачи. Если отказаться от условий  $u_j(0) = A_j$ , то решение  $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$  зависело бы от некоторых параметров (некоторых постоянных интегрирования системы (1)).

Для доказательства существования решений задачи  $\mathcal{P}$  применяется нестандартный метод возмущений, основанный на использовании решений более простой нелинейной задачи, которая является невозмущенной [2], [3]. Важно, что более простая нелинейная задача сохраняет некоторые ключевые свойства исходной задачи, в частности, более простая задача имеет нелинеаризуемые решения. Нестандартным методом возмущения удастся установить существование в том числе *нелинеаризуемых* решений задачи  $\mathcal{P}$ , т.е. решений, которые не переходят в какие-либо решения линеаризованной задачи (получающейся, если в системе (1) положить  $\alpha = c_3 = c_4 = 0$ ) при  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $c_3 \rightarrow 0$ ,  $c_4 \rightarrow 0$ .

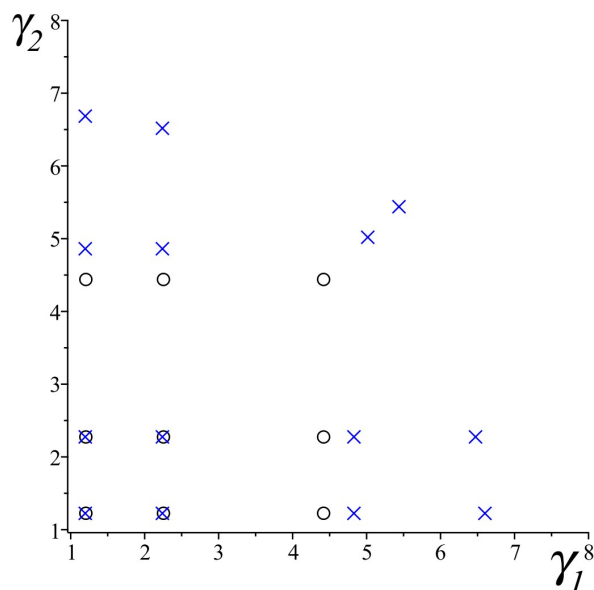
В качестве «невозмущенной» используем задачу — назовем ее  $\mathcal{P}'$  — получающуюся из задачи  $\mathcal{P}$ , если в системе (1) положить  $c_j, c_{j+2}$  равными нулю. Заметим, что фактически задача  $\mathcal{P}'$  распадается на две независимые задачи  $\mathcal{P}'_j$ . Задача  $\mathcal{P}'$  исследована в работе [4]. Используя представленные в работе [4] факты, получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть каждая из задач  $\mathcal{P}'_j$  имеет  $n_j$  решений  $\bar{\gamma}_{j,1}, \dots, \bar{\gamma}_{j,n_j}$ . Тогда существуют числа  $c_j^0, c_{j+2}^0 > 0$  такие, что для всех  $c_j \in (-c_j^0, c_j^0)$ ,  $c_{j+2} \in (-c_{j+2}^0, c_{j+2}^0)$  задача  $\mathcal{P}$  имеет по крайней мере  $n_1 \times n_2$  векторных СЗ  $\hat{\gamma}_{k_1, k_2} = (\hat{\gamma}_{1, k_1}, \hat{\gamma}_{2, k_2})$ ,  $k_j = \bar{1}, n_j$ ; при этом каждое  $\hat{\gamma}_{k_1, k_2}$  содержится в некоторой окрестности точки  $(\bar{\gamma}_{1, k_1}, \bar{\gamma}_{2, k_2})$ .

Подчеркнем, что теорема 1 устанавливает существование в том числе нелинеаризуемых векторных СЗ задачи  $\mathcal{P}$  в том случае, если среди решений  $\bar{\gamma}_{j,k}$  вспомогательных нелинейных задач  $\mathcal{P}'_j$  имеются такого рода решения, а этого всегда можно добиться, расширяя набор решений задач  $\mathcal{P}'_j$ , которых, вообще говоря, бесконечно много [4].

Численно приближенные решения задачи  $\mathcal{P}$  можно найти, используя метод пристрелки. На рисунке 1 представлены результаты приближенного решения задачи  $\mathcal{P}$ . В вычислениях использовались следующие параметры:  $\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x) = 2.4025 + 0.01x$ ,  $\alpha = 6.4 \times 10^{-2}$ ,  $\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x) = \sin(2\pi h^{-1}x)$ ,  $a(x) = \beta(x) = \cos(2\pi h^{-1}x)$ ,  $c_1 = c_2 = 0.005$ ,  $c_3 = c_4 = 0.002\alpha$ ,  $h = 3.66$ . Черные окружности обозначают пары решений вспомогательных задач  $\mathcal{P}'_j$ , синие крестики – векторные СЗ задачи  $\mathcal{P}$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-71-10036).



**Рис. 1.** Результаты численного решения задач  $\mathcal{P}'_j$  и  $\mathcal{P}$ .

### Литература

1. Smirnov, Yu. G. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik // Journal of mathematical physics. – 2013. – Vol. 54, № 8.
2. Dyundyaeva, A. A. Transverse electric guided wave propagation in a plane waveguide with kerr nonlinearity and perturbed inhomogeneity in the permittivity function / A. A. Dyundyaeva, S. V. Tikhov, D. V. Valovik // Photonics. – 2023. – Vol. 10, № 4. – P. 371.
3. Валовик, Д. В. О нестандартном методе возмущений для доказательства существования нелинеаризуемых решений в одной нелинейной задаче на собственные значения, возникающей в теории волноводов / Д. В. Валовик, А. А. Дюндяева, С. В. Тихов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2024. – Т. 64, № 10. – С. 1949–1965.
4. Tikhov, S. V. Maxwell's equations in a plane waveguide with nonhomogeneous nonlinear permittivity: Analytical and numerical approaches / S. V. Tikhov, D. V. Valovik // Journal of Nonlinear Science. – 2023. – Vol. 33, № 6. – P. 105.

## ОБ ОЦЕНКЕ ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ НОРМЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ГРУБЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ С ПОКАЗАТЕЛЕМ ГЁЛЬДЕРА, БОЛЬШИМ $1/4$

М.М. Васьковский, М.Ю. Зорько

Зафиксируем произвольные  $T > 0$  и  $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ . Пусть  $V, W$  – конечномерные евклидовы пространства. Через  $C^\alpha([0, T], V)$  и  $C_2^\alpha([0, T], V)$  обозначим соответственно множества функций  $f : [0, T] \rightarrow V$ ,  $g : [0, T]^2 \rightarrow V$  таких, что гельдеровские полунормы

$$\|f\|_\alpha := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|f_t - f_s|}{|t - s|^\alpha}, \quad \|g\|_{\alpha, 2} := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|g_{s, t}|}{|t - s|^\alpha}$$

конечны. Далее для функции двух переменных  $g_{s, t}$  будем писать  $\|g\|_\alpha$  вместо  $\|g\|_{\alpha, 2}$ . Для функции одной переменной  $f_t$  через  $f_{s, t}$  будем обозначать приращение  $f_t - f_s$ .

Через  $C_b^k(V, W)$  обозначим множество функций  $h : V \rightarrow W$  таких, что норма

$$\|h\|_{C_b^k} := \sum_{i=0}^k \|D^i h\|_\infty$$

конечна, где  $\|D^i h\|_\infty = \sup_{X \in V} |D^i h(X)|$ .

Обозначим через  $\mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$  множество  $\alpha$ -непрерывных по Гельдеру грубых траекторий, т.е. множество элементов  $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3)$ , таких, что  $\mathbf{X}^i \in C_2^{i\alpha}([0, T], V^{\otimes i})$  для любого  $i = 1, 2, 3$ , и для любых  $s, u, t \in [0, T]$  выполняется следующее тождество Чена

$$\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t},$$

где

$$(\mathbf{X}_{s,u} \boxplus \mathbf{X}_{u,t})^i = \sum_{j=0}^i \mathbf{X}_{s,u}^j \otimes \mathbf{X}_{u,t}^{i-j}.$$

Отметим, что операция  $\boxplus$  задает умножение на тензорной алгебре  $T^{(3)}(V) = \bigoplus_{i=0}^3 V^{\otimes i}$ , где  $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ . Таким образом, элемент  $\mathbf{X} : [0, T]^2 \rightarrow T^{(3)}(V)$  однозначно определяется значениями  $\mathbf{X}_{0,t}$ ,  $t \in [0, T]$ , поскольку  $\mathbf{X}_{s,t} = (\mathbf{X}_{0,s})^{-1} \boxplus \mathbf{X}_{0,t}$ . Далее будем писать  $\mathbf{X}_t$  вместо  $\mathbf{X}_{0,t}$ .

Для  $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$  положим

$$\|\mathbf{X}\|_\alpha = \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{X}^i\|_{i\alpha}^{1/i}.$$

Грубая траектория  $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3)$  называется геометрической, если

$$\text{Sym}(\mathbf{X}_{s,t}^i) = \frac{1}{i!} (\mathbf{X}_{s,t}^1)^{\otimes i} \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Множество геометрических грубых траекторий будем обозначать через  $\mathcal{C}_g^\alpha([0, T], V)$ .

Будем говорить, что элемент  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$  является грубой траекторией над  $X \in C^\alpha([0, T], V)$ , если  $\mathbf{X}_{0,t}^1 = X_t$  для любых  $t \in [0, T]$ .

Пусть  $X \in C^\alpha([0, T], V)$ , а  $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3)$  – грубая траектория над  $X$ . Будем говорить, что функция  $Y_t \in C^\alpha([0, T], W)$  слабо управляется грубой траекторией  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ , если существуют функции  $Y^{(1)} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ ,  $Y^{(2)} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V^{\otimes 2}, W)$  такие, что  $Y_{s,t} = Y_s^{(1)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s,t}^2 + R_{s,t}^{Y,3}$ ,  $Y_{s,t}^{(1)} = Y_s^{(2)} \mathbf{X}_{s,t}^1 + R_{s,t}^{Y,2}$ ,  $Y_{s,t}^{(2)} = R_{s,t}^{Y,1}$ ; а каждый из остаточных членов  $R^{Y,i}$  имеет конечную гильбердовскую полунорму  $\|R^{Y,i}\|_{i\alpha}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Определим банахово пространство

$$\mathcal{D}_\mathbf{X}^\alpha([0, T], W) = \left\{ (Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}) : Y \in C^\alpha([0, T], W), \sum_{i=1}^3 \|R^{Y,i}\|_{i\alpha} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|Y\|_{\mathcal{D}_\mathbf{X}^\alpha} := \sum_{i=0}^2 |Y_0^{(i)}| + \sum_{i=1}^3 \|R^{Y,i}\|_{i\alpha},$$

где  $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], W)$ ,  $Y_t^{(0)} = Y_t$ .

Пусть  $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0, T], V)$ ,  $Y \in C^{\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$ ,  $(Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$ . Возьмем некоторые  $s, t \in [0, T]$ ,  $s < t$ , через  $\mathcal{P}$  обозначим произвольное конечное разбиение отрезка  $[s, t]$  точками.

Потраекторным интегралом  $\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r$  будем называть следующий предел интегральных сумм (если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка  $[s, t]$  точками):

$$\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r := \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^2 Y_u^{(i)} \mathbf{X}_{u,v}^{i+1}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение, управляемое геометрической грубой траекторией  $\mathbf{X} = (1, \mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3) \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, T], V)$ :

$$dY_t = f(Y_t) d\mathbf{X}_t, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где  $f \in C_b^3(W, \mathcal{L}(V, W))$ .

**Определение.** Решением уравнения (1) будем называть элемент  $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], W)$ , такой что: 1)  $Y \in C^{\alpha}([0, 1], W)$ ; 2) функции  $Y_t, f(Y_t)$  слабо управляются грубой траекторией  $\mathbf{X}$ ; 3) для любого  $t \in [0, T]$  имеет место равенство

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s,$$

где интеграл в правой части – потраекторный интеграл, при этом  $Y'_t = f(Y_t)$ ,  $Y''_t = (f(Y_t))' = Df(Y_t)Y'_t$ ,  $(f(Y_t))'' = Df(Y_t)Y''_t + D^2f(Y_t)(Y'_t)^{\otimes 2}$ .

**Теорема.** Пусть  $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ ,  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^{\alpha}([0, T], \mathbb{R})$ ,  $f \in C_b^3(W, \mathcal{L}(\mathbb{R}, W))$ ,  $\mathbf{Y} = (Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\alpha}([0, T], W)$  – решение уравнения (1). Тогда существуют постоянные  $C = C(\alpha, T, \|f\|_{C_b^3})$  и  $\beta = \beta(\alpha) > 1$ , такие что выполняется неравенство

$$\|Y\|_{\alpha} \leq C \cdot (\|\mathbf{X}\|_{\alpha}^{\beta} + 1).$$

## К ВОПРОСУ О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

В.М. Волков, Ц. Дун, Г.Ф. Громыко, А.В. Подберезский

Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного уравнения конвекции – диффузии в области  $\mathfrak{R}$  прямоугольной формы

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (x, y) \in \mathfrak{R}, \quad (1)$$

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad \nabla v = 0, \quad u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \mathfrak{R}, \quad (2)$$

где  $\mu \ll 1$  имеет смысл малого параметра, определяющего поведение решения в пограничном слое. Данная задача традиционно рассматривается в качестве простейшей линейаризованной модели течения вязкой несжимаемой жидкости с заданным полем скоростей, удовлетворяющим уравнению неразрывности. На примере данной модельной задачи сравним эффективность спектрального метода Чебышёва и метода конечных разностей при моделировании динамики жидкости в каналах переменной ширины.

Пусть область  $\mathfrak{R}$  имеет криволинейные горизонтальные границы,

$$\mathfrak{R} = \{x \in [-1, 1], |y| \leq (1 - \alpha \cos(0.5\pi x))^{-2}\}, \quad (3)$$

что соответствует каналу с переменной шириной по вертикали. Переход к новым криволинейным координатам,  $\eta = \eta(x, y) = x$ ,  $\xi = \xi(x, y) = y(1 - \alpha \cos(0.5\pi x))^2$ , сводит задачу (1)–(2) к задаче в прямоугольной области

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta, \xi (1 - \alpha \cos(0.5\pi \eta))^{-2}), \quad (\eta, \xi) \in R, \quad (4)$$

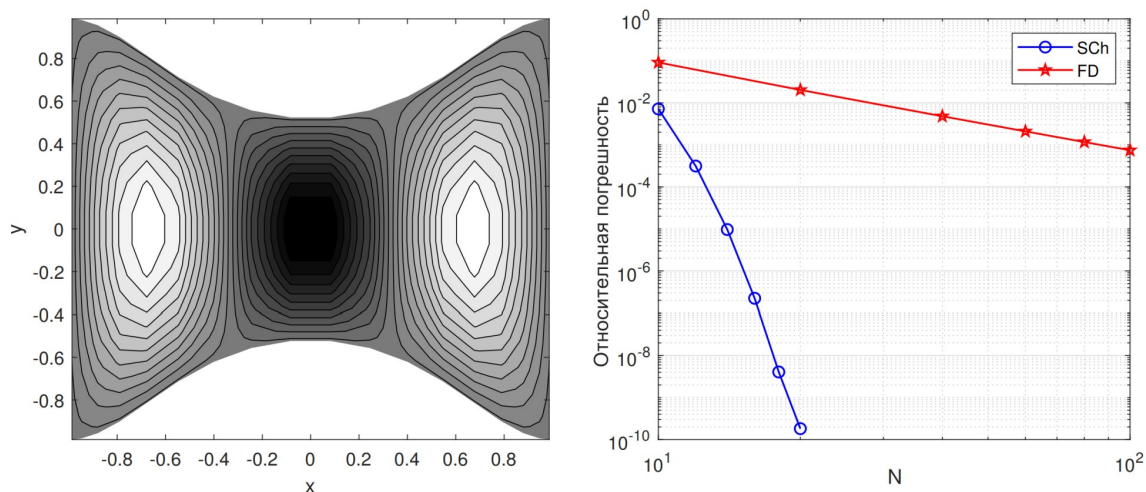
$$R = [-1, 1] \times [-1, 1], u(\pm 1, \eta) = u(\xi, \pm 1) = 0, \quad (5)$$

где

$$a_{11} = \mu(\eta_x^2 + \eta_y^2), \quad a_{22} = \mu(\xi_x^2 + \xi_y^2), \quad a_{12} = \mu(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y),$$

$$a_1 = \mu(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + v_x \eta_x + v_y \eta_y, \quad a_2 = \mu(\xi_{xx} + \xi_{yy}) + v_x \xi_x + v_y \xi_y.$$

На первый взгляд постановка задачи представляется искусственно упрощенной в силу того, что мы полагаем заранее известными аналитические выражения для новых криволинейных координат. Тем не менее, важно подчеркнуть, что данный подход без существенной потери точности может быть обобщен и на случай, когда ширина канала не имеет явной аналитической зависимости от продольной координаты. Например, когда ширина канала является решением отдельной (или частью самосогласованной) задачи, которая решается в совокупности с задачей (4), (5) численно. В этом случае производные при расчете коэффициентов уравнения (4) могут быть вычислены в узлах прямоугольной сетки также численно, используя, например, технику спектрального дифференцирования.



**Рис. 1.** Решение задачи (слева) и динамика убывания погрешности спектрального (SCh), и конечно-разностного (FD) методов в зависимости от размерности сетки  $N \times N$  (справа)

Для численного решения задачи (4) – (5) использует спектральный метод на основе полиномов Чебышёва [1–4], и разностный метод второго порядка точности [5]. Для реализации этих методов использована итерационная техника на основе метода бисопряженных градиентов [6] с переобуславливателями специального вида, показавшими высокую эффективность при решении задач подобного класса [3–5,7].

Результаты численного эксперимента представлены на Рис. 1.

Представленные результаты демонстрируют преимущества спектрального метода Чебышева, обеспечивающего для рассмотренного случая практически точное решение задачи на сетке, которая едва дает 1% относительной погрешности при использовании метода конечных разностей.

### Литература

1. Trefethen L.N. Spectral Methods in MATLAB. – Philadelphia: SIAM, 2000.
2. Orszag S. A. Spectral methods for problems in complex geometries // Numerical methods for partial differential equations // Academic Press. – 1979. – P. 273–305.
3. Волков, В. М. Спектральный метод Чебышёва для двумерных задач конвекции-диффузии / В. М. Волков, Ц. Дун // Математическое моделирование. – 2026. – Т. 38, № 2. – С. 163–177.
4. Волков, В. М. О реализации спектрального метода Чебышёва для двумерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Ц. Дун // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 2. – С. 82–92.
5. Волков, В. М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Изв. Национальной академии наук Беларуси. Серия физ.-мат. – 2019. – Т. 54, № 4. – С. 454–459.
6. Van der Vorst H.A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on scientific and Statistical Computing. – 1992. – Vol. 13, № 2. – P. 631–644.
7. Волков, В. М. Итерационная реализация спектрального метода Чебышева для двумерных эллиптических уравнений с переменными коэффициентами / В. М. Волков, Е. И. Качаловская // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 3. – С. 53–62.
8. Волков, В. М. Итерационная реализация разностных схем в методе фиктивных областей для эллиптических задач со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 1. – С. 69–76.

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЛЮКОЗО-ИНСУЛИНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.И. Гламаздин, К.Я. Лишик

Математическое моделирование биологических процессов является важной задачей, находящейся на стыке медицины, математики и информационных технологий. Особое значение оно приобретает при исследовании хронических заболеваний, таких как сахарный диабет, где точность прогнозирования и корректность принимаемых решений напрямую влияют на состояние пациента. В условиях роста числа пациентов с сахарным диабетом первого типа возрастает необходимость в разработке программных средств, позволяющих анализировать и прогнозировать динамику глюкозо-инсулинового взаимодействия

[1]. Предлагаемый программный комплекс основан на математической модели Novotka [2], представляющей собой систему из десяти нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой в качестве внешних воздействий рассматривают инсулиновые дозы и приемы пациентом углеводной пищи. Математическая модель состоит из подсистемы глюкозы (абсорбция, распределение и утилизация), подсистемы инсулина (абсорбция, распределение и утилизация) и подсистемы действия инсулина (действие инсулина на перенос, удаление и эндогенное производство глюкозы).

Предлагаемое веб-приложение предназначено для моделирования глюкозо-инсулинового взаимодействия у пациентов с сахарным диабетом первого типа и автоматизации процессов, связанных с оценкой их состояния. Программный комплекс объединяет функции ввода данных пациента, описание внешних воздействий, прогнозирования уровня глюкозы и визуализации результатов, обеспечивая удобный доступ к ним через веб-интерфейс. Основное назначение программного комплекса — выполнять моделирование на основе системы дифференциальных уравнений и использовать полученные результаты для анализа состояния пациента.

Приложение ориентировано как на пациентов, так и на медицинские учреждения. Для пациентов система предоставляет возможность вводить данные о приёме пищи, инъекциях инсулина и получать прогноз изменения уровня глюкозы. Для врачей-эндокринологов предусмотрен доступ к истории наблюдений, результатам моделирования и инструментам анализа, что позволяет корректировать параметры модели и принимать обоснованные решения. Использование веб-технологий обеспечивает доступ к системе через браузер без необходимости установки дополнительного программного обеспечения.

Программное средство объединяет функции моделирования, хранения и анализа данных в единой системе. Оно представляет собой веб-ориентированное решение, обеспечивающее удобный контроль параметров как пациентами, так и врачами, и позволяет повысить эффективность контроля состояния при сахарном диабете первого типа. Архитектура веб-приложения создается с использованием современных технологий: Python и Django для серверной логики, математических вычислений (решений системы нелинейных дифференциальных уравнений) и реализации веб-интерфейса, PostgreSQL для хранения данных, а также JavaScript и библиотеки визуализации для наглядного отображения графиков и прогнозов. Такая архитектура обеспечит устойчивую работу системы, масштабируемость и возможность интеграции дополнительных модулей в будущем. Структура базы данных спроектирована с учётом хранения информации о пациентах, параметрах моделирования, результатах расчётов и истории изменений. База данных обеспечивает логическую целостность, надёжность и быстрый доступ к данным для анализа и визуализации. Интуитивно понятный пользовательский интерфейс обеспечивает удобный ввод данных, наглядное представление результатов, прогнозирование состояния и возможность работы пользователям с разным уровнем подготовки.

Функциональная модель программного средства описывает основные возможности системы и взаимодействие пользователей с её компонентами. Она отражает структуру выполняемых системой функций и служит основой для дальнейшей детализации вариантов использования и функциональных требований. Веб-приложение использует ролевую модель доступа, в рамках которой пользователи разделяются на несколько категорий в зависимости от выполняемых задач. Такой подход позволяет разграничить права доступа, повысить безопасность системы и обеспечить удобство работы для различных типов пользователей. Каждая роль в системе представляет собой абстракцию, объединяющую пользователей с одинаковыми правами доступа и сценариями работы. Роль определяет

набор доступных функций и операций, которые пользователь может выполнять в системе. В программном средстве выделены основные роли: пациент, врач и администратор. Каждая из ролей взаимодействует с системой по-разному и выполняет собственные функции, связанные с использованием возможностей программного средства. Функциональная модель программного средства может быть представлена в виде диаграммы вариантов использования (Use Case Diagram) в нотации UML, которая позволяет наглядно отразить взаимодействие пользователей с системой и определить основные сценарии её применения. Использование данной диаграммы даёт возможность формализовать требования к системе, выделить ключевые функции и определить границы взаимодействия между пользователями и программным средством.

Варианты использования являются важным инструментом анализа и проектирования программного средства, поскольку позволяют описать типовые сценарии взаимодействия пользователей с системой. Они отражают последовательность действий пользователя и соответствующие реакции системы, что даёт возможность формализовать поведение программного средства и определить его функциональные границы. Рассмотрение вариантов использования особенно эффективно при применении ролевой модели доступа. Такой подход позволяет не только упростить проектирование системы, но и обеспечить её безопасность за счёт разграничения прав доступа к функционалу и базы данных системы. Каждый из рассмотренных вариантов использования включает последовательность действий пользователя и соответствующие отклики системы, что позволяет формализовать поведение приложения в различных сценариях. Описание вариантов использования служит основой для последующего определения функциональных требований и разработки архитектуры системы.

Математическая модель глюкозо-инсулинового взаимодействия в модели Novorka использует десять динамических переменных, поведение которых описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. В результате проведения вычислительных экспериментов получены основные характеристики глюкозо-инсулинового взаимодействия в теле пациента. Особый интерес представляют динамические прогнозы уровня глюкозы, по которым вычисляются основные характеристики сахарного диабета первого типа, а именно средние значения, разброс по интервалам значений, длительность (по времени) превышения уровней глюкозы и т.д.

#### Литература

1. Карпелов В.А., Филиппов Ю.И., Тарасов Ю.В., Боярский М.Д., Майоров А.Ю., Шестакова М.В., Дедов И.И. Математическое моделирование системы регулирования гликемии у пациентов с сахарным диабетом // Вестник РАМН. – 2015. – № 70(5). – С. 549–560.  
URL: <https://doi.org/10.15690/vramn.v70.i1441>
2. Novorka R., Canonico V., Chassin L.J. and etc. Nonlinear model predictive control of glucose concentration in subjects with type 1 diabets // Physiological measurement. – 2004. – Vol. 25 (4). – P. 905–920. – URL: <https://doi.org/10.1088/0967-3334/25/4/010>.

### К ВОПРОСУ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНВЕСТИЦИОННОЙ СТРАТЕГИИ БАНКА

М.П. Дымков, Е.В. Братковский, С.М. Дымков

В работе дано приложение теории оптимального управления [1, 2] к задаче распределения активов банка и финансирования инвестиций за счет сочетания нераспределенной

прибыли и внешнего капитала [3, 4]. Для решения этой задачи предлагается применить принцип максимума Понтрягина, разработанный в теории оптимизации динамических систем управления. В контексте финансовых операций обсуждается экономический смысл гамильтониана и сопряженных переменных, с помощью которых определяется оптимальное решение.

**Постановка задачи.** Для каждого момента времени  $t, t \in [0, T]$  введем следующие переменные:  $y(t)$  стоимость активов или инвестированного капитала банка;  $x(t)$  интенсивность (скорость) дохода (в тыс. рублей);  $u(t)$  внешнее или новое финансирование за счет собственных средств, выраженное в кратном отношении к текущей прибыли;  $c, 0 \leq c \leq 1$  – некоторая константа, выраженная в долях от текущего дохода, так что величина  $(1 - c)$  характеризует стоимость размещения внешнего капитала, (т.е. она отвечает за транзакционные издержки, представительские расходы, бонусы и др. из-за возможной флуктуации стоимости при проведении сделок с внешним капиталом);  $v(t)$  нераспределенная доля текущей прибыли, так что  $1 - v(t)$  представляет собой долю для выплаты дивидендов,  $0 \leq v(t) \leq 1$ ;  $r$  фактическая норма прибыли (предполагается постоянной) на инвестированный капитал банка;  $\rho$  постоянная ставка дисконтирования, известная как требуемая акционерами норма прибыли,  $r > \rho$ ;  $g$  верхняя граница темпов роста активов банка,  $T$  горизонт планирования. С учетом введенных обозначений имеем, что текущий доход фирмы равен  $x(t) = ry(t)$ . Скорость роста стоимости инвестированного капитала  $y(t)$  определяется как сумма привлеченного внешнего капитала (с учетом флуктуации сделки) и собственного капитала  $\dot{y} = cu(t)x(t) + v(t)x(t)$ . Заданное ограничение на верхнюю границу темпов роста активов  $\dot{y}/y \leq g$  является ограничением на допустимые управления. Цель банка состоит в максимизации чистой приведенной стоимости общей суммы будущих дивидендов, выплачиваемых по первоначальным акциям. Часть этих дивидендов будет направляться на новый акционерный капитал, который будет получать доходность, равную ставке дисконтирования  $\rho$ . В итоге, задача оптимального управления свелась к нахождению функций  $u(t), v(t), t \in [0, T]$ , которые доставляют максимум функционалу

$$J(u, v) = \int_0^T e^{-\rho t} (1 - u(t) - v(t)) x(t) dt \rightarrow \max_{u, v} \quad (1)$$

на решениях дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(cu(t) + v(t))x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2)$$

при ограничениях на управление

$$cu(t) + v(t) \leq \frac{g}{r}, \quad u(t) \geq 0, \quad 0 \leq v(t) \leq 1, \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

**Решение задачи.** В задаче оптимального управления (1) – (3) определим гамильтониан по формуле

$$H(x, \psi, u, v, t) = (1 - u - v)x + \psi r(cu + v)x, \quad (4)$$

где сопряженная переменная  $\psi(t), t \in [0, T]$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \rho\psi(t) - (1 - u(t) - v(t)) - \psi(t)r(cu(t) + v(t)), \quad \psi(T) = 0.$$

Согласно принципа максимума Понтрягина, если  $u^0(t), v^0(t), x^0(t), t \in [0, T]$  оптимальное решение задачи (1) – (3), то в каждый момент времени  $t, t \in [0, T]$  гамильтониан достигает максимума

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), v^0(t), t) = \max_{u, v} H(x^0(t), \psi^0(t), u, v, t) \quad (5)$$

на множестве  $cu + v \leq \frac{g}{r}$ ,  $u \geq 0$ ,  $0 \leq v \leq 1$ . Гамильтониан системы можно представить в виде билинейной функции  $H(x, \psi, u, v, t) = [M_1(\psi)u(t) + M_2(\psi)v(t)]x(t)$ . Тогда из принципа максимума Понтрягина следует, что справедливо следующее утверждение

**Теорема.** В каждый момент времени  $t, t \in [0, T]$  оптимальное решение  $u^0, v^0$  задачи (1) – (3) является решением следующей билинейной задачи параметрического программирования: найти максимум функции

$$G(u, v) = M_1(\psi)u + M_2(\psi)v \rightarrow \max_{u, v} \quad (5)$$

при ограничениях

$$cu + v \leq \frac{g}{r}, \quad u \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (6)$$

Для нахождения решения достаточно произвести анализ возможных комбинаций параметров билинейной задачи максимизации (5) – (6) и найти ее оптимальное решение в каждой из этих комбинаций. Эти комбинации находятся из графического анализа множества допустимых решений (6) и поведения на нем градиента целевой функции (5). Решение задачи получаются разными, в зависимости от соотношения коэффициентов  $g$  и  $r$ . Ниже приведено решение в виде возможных комбинаций поведения  $\text{grad } G(u, v) = \{M_1(\psi), M_2(\psi)\}$  на многограннике (6) для случая, когда  $g > r$ :

- I. Если  $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) < 0$ , тогда  $u^0(t) = 0, v^0(t) = 0$ ;
- II. Если  $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) = 0$ , тогда  $u^0(t) = 0, 0 \leq v^0(t) \leq \min\{1, \frac{g}{r}\}$ ;
- III. Если  $0 < M_1(\psi) < cM_2(\psi)$ , тогда  $u^0(t) = \frac{g-r}{rc}, 0 \leq v^0(t) = 1$ ;
- IV. Если  $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) > 0$ , тогда  $u^0(t) = 0, v^0(t) = 1$ ;
- V. Если  $M_1(\psi) = 0, M_2(\psi) > 0$ , тогда  $0 \leq u^0(t) \leq \frac{g-r}{rc}, v^0(t) = 1$ .

Можно показать, что особые (сингулярные) случаи управления II, V не могут реализоваться ни на каком ненулевом промежутке времени. В работе приведено численное решение примера с условными данными, а также обсуждаются экономические интерпретации гамильтониана и сопряжённых функций, используемых для решения и анализа задачи.

### Литература

1. Габасов, Р. Ф., Кириллова, Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : Наука и техника, 1974. — 272 с.
2. Дыхта, В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок — Москва : Физматгиз, 2003. — 256 с.
3. Krouse, C. G. Optimal financing and capital structure program for the firm / C. G. Krouse // Journal of Finance. — 1972. — Vol. 27. — P. 1057–1071.
4. Смоляк, С. А. Оптимальное поведение фирмы на финансовом рынке и ставка дисконта / С. А. Смоляк // Экономика и математические методы. — 2004. — Том 40(2). — С. 72–87.

## КОНСЕРВАТИВНАЯ МОНОТОННАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

О.А. Лаврова, В.К. Полевилов

Предметом нашего рассмотрения является безразмерное двумерное стационарное уравнение конвекции-диффузии в магнитной жидкости, которое в декартовых координатах  $x_1, x_2$  может быть записано в дивергентном виде [1]:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[ \frac{\partial C}{\partial x_\alpha} - \left( \gamma(\tilde{H}) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_\alpha} + \text{Re Sc } v_\alpha \right) C \right] = 0,$$

где  $C$  – объемная концентрация феррочастиц в магнитной жидкости;  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  – вектор скорости конвективного движения;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $\text{Sc}$  – число Шмидта;  $\gamma(\tilde{H}) = \coth \tilde{H} - 1/\tilde{H} \geq 0$  – функция Ланжевена,  $\tilde{H}$  – безразмерная напряженность магнитного поля. Для скорости конвективного движения выполняется условие неразрывности  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , для напряженности магнитного поля –  $\nabla^2 \tilde{H} \geq 0$  [1].

Рассмотрим более общее уравнение:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \mathcal{L}_\alpha^{(k,r)} u = -f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad (1)$$

где  $\mathcal{L}_\alpha^{(k,r)} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \ell_\alpha^{(k,r)} u$ ,  $\ell_\alpha^{(k,r)} u = k \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - r_\alpha u$ ;  $k = k(x_1, x_2) > 0$ ,  $r_\alpha = r_\alpha(x_1, x_2)$ ,  $q = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\alpha} \geq 0$ .

Считая сетку равномерной с шагами  $h_1, h_2$ , запишем уравнение баланса для контрольного объема  $D^{(0)} = \{x_\alpha^{(-0.5)} \leq x_\alpha \leq x_\alpha^{(+0.5)}; \alpha = 1, 2\}$ , соответствующего внутреннему узлу  $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D^{(0)}$ , где  $x_\alpha^{(\pm 0.5)} = x_\alpha^{(0)} \pm 0.5h_\alpha$ . Используя известное обозначение для правой разностной производной  $\langle \rangle_{x_\alpha} = (\langle \rangle^{(+1_\alpha)} - \langle \rangle^{(0)}) / h_\alpha$ , получим уравнение баланса в виде:

$$\begin{aligned} & h_1 \left( \int_{x_2^{(-0.5)}}^{x_2^{(+0.5)}} \ell_1^{(k,r)} u(x_1^{(-0.5)}, x_2) dx_2 \right)_{x_1} + h_2 \left( \int_{x_1^{(-0.5)}}^{x_1^{(+0.5)}} \ell_2^{(k,r)} u(x_1, x_2^{(-0.5)}) dx_1 \right)_{x_2} + \\ & + \iint_{D^{(0)}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из уравнения (2) имеем  $\partial u / \partial x_\alpha = (\ell_\alpha^{(k,r)} u + r_\alpha u) / k$  при  $x_\alpha = x_\alpha^{(-0.5)}$ ;  $\alpha = 1, 2$ . Интегрируя по  $x_\alpha$  от  $x_\alpha^{(-1)}$  до  $x_\alpha^{(0)}$ , получим  $u^{(0)} - u^{(-1_\alpha)} \approx (\ell_\alpha^{(k,r)} u + r_\alpha u)^{(-0.5_\alpha)} \int_{x_\alpha^{(-1)}}^{x_\alpha^{(0)}} (1/k) dx_\alpha$ , где  $u^{(0)} = u(x^{(0)})$ ,  $u^{(-1_1)} = u(x_1^{(-1)}, x_2^{(0)})$ ,  $u^{(-1_2)} = u(x_1^{(0)}, x_2^{(-1)})$ ,  $u^{(-0.5_1)} = u(x_1^{(-0.5)}, x_2^{(0)})$ ,  $u^{(-0.5_2)} = u(x_1^{(0)}, x_2^{(-0.5)})$ . Отсюда следует

$$(\ell_\alpha^{(k,r)} u)^{(-0.5_\alpha)} \approx \overset{\circ}{a}_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} - r_\alpha^{(-0.5_\alpha)} u^{(-0.5_\alpha)}; \quad \overset{\circ}{a}_\alpha = \left( \frac{1}{h_\alpha} \int_{x_\alpha^{(-1)}}^{x_\alpha^{(0)}} \frac{1}{k} dx_\alpha \right)^{-1}, \quad u_{\bar{x}_\alpha} = u_{x_\alpha}^{(-1_\alpha)}.$$

Применив эту аппроксимацию в уравнении баланса (2), приходим к разностной схеме

$$\sum_{\alpha=1}^2 \Lambda_{\alpha}^{(a,b)} y = -\varphi(x), \quad (3)$$

где  $x = x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  – внутренний узел сетки,  $y = y^{(0)} = y(x^{(0)})$  – разностное решение в узле  $x^{(0)}$ ,  $\Lambda_{\alpha}^{(a,b)} y = \left( \lambda_{\alpha}^{(a,b)} y \right)_{x_{\alpha}}$ ,  $\lambda_{\alpha}^{(a,b)} y = \varkappa_{\alpha} a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}} - b_{\alpha}^{+} y^{(-1\alpha)} - b_{\alpha}^{-} y$  – разностные операторы,  $a_{\alpha} = \overset{\circ}{a}_{\alpha} + O(h^2)$ ,  $b_{\alpha} = r_{\alpha}^{(-0.5\alpha)} + O(h^2)$ ,  $\varkappa_{\alpha} = 1/(1 + R_{\alpha})$ ,  $R_{\alpha} = 0.5h_{\alpha} |b_{\alpha}|/a_{\alpha}$ ,  $b_{\alpha}^{\pm} = 0.5(b_{\alpha} \pm |b_{\alpha}|)$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{D(0)} f(x) dx_1 dx_2 + O(h^2)$ ,  $h = \max(h_1, h_2)$ .

Схема (3) является консервативной, поскольку умноженная на  $h_1 h_2$  она представляет собой дискретный аналог интегрального закона сохранения (2).

Будем считать, что коэффициенты схемы (3) сохраняют свойства  $k > 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{r} \geq 0$  соответствующих коэффициентов дифференциального уравнения (1), т.е.  $a_{\alpha} > 0$ ,  $d = \sum_{\alpha=1}^2 (b_{\alpha})_{x_{\alpha}} \geq 0$ , и запишем схему (3) в канонической форме принципа максимума [2]:  $Cy = \sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha} y^{(-1\alpha)} + B_{\alpha} y^{(+1\alpha)}) + \varphi$ , где

$$A_{\alpha} = \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{h_{\alpha}^2} + \frac{b_{\alpha}^{+}}{h_{\alpha}} > 0, \quad B_{\alpha} = \left( \frac{\varkappa_{\alpha} a_{\alpha}}{h_{\alpha}^2} - \frac{b_{\alpha}^{-}}{h_{\alpha}} \right)^{(+1\alpha)} > 0, \quad C = \sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha} + B_{\alpha}) + d \geq \sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha} + B_{\alpha}).$$

Это значит, что схема (3) является монотонной.

Анализируя аппроксимационные свойства на множестве гладких функций, нетрудно убедиться, что консервативная монотонная схема (3) обладает вторым порядком аппроксимации.

В декартовых координатах  $v_1 = \partial\psi/\partial x_2$ ,  $v_2 = -\partial\psi/\partial x_1$ , где  $\psi$  – функция тока, поэтому условие  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  выполняется автоматически. Если напряженность магнитного поля  $\tilde{H}$  – заданная функция аналитического вида, то обеспечить условия второго порядка аппроксимации для коэффициентов схемы можно, задавая, например,  $a_{\alpha} = k^{(-0.5\alpha)} > 0$ ,

$$b_1 = \gamma \left( \tilde{H}^{(-0.5_1)} \right) \tilde{H}_{\bar{x}_1} + \text{Re Sc} \left( (\psi_{\bar{x}_2} + \psi_{x_2})^{(-1_1)} + \psi_{\bar{x}_2} + \psi_{x_2} \right) / 4 = r_1^{(-0.5_1)} + O(h^2),$$

$$b_2 = \gamma \left( \tilde{H}^{(-0.5_2)} \right) \tilde{H}_{\bar{x}_2} - \text{Re Sc} \left( (\psi_{\bar{x}_1} + \psi_{x_1})^{(-1_2)} + \psi_{\bar{x}_1} + \psi_{x_1} \right) / 4 = r_2^{(-0.5_2)} + O(h^2).$$

Схема апробирована на известной задаче гравитационной конвекции [1].

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», шифр НИР 1.4.01.4.

### Литература

1. Polevikov, V. K. A monotone finite-difference high order accuracy scheme for the 2D convection-diffusion equations / V. K. Polevikov // J. of the Belarussian State University. Mathematics and Informatics. – 2019. – № 3. – P. 71–83. – DOI: 10.33581/2520-6508-2019-3-71-83.
2. Берковский, Б. М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б. М. Берковский, В. К. Полевиков. – Минск : Университетское, 1988. – 167 с.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ: РАЗВИТИЕ МЕТОДА БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА – ЭЙТКЕНА

А.В. Лебедев, Ю.В. Трубников, М.М. Чернявский

В докладе развит метод Эйлера – Лагранжа вычисления всех корней произвольного полинома  $P(z)$  с комплексными коэффициентами, на базе подсчёта пределов отношений определителей (как и в методах Бернулли – Эйткена), построенных по коэффициентам разложений в ряды Тейлора и Лорана функции  $\frac{P'(z)}{P(z)}$ .

Пусть  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ;  $a_0, a_n \neq 0$  – произвольный полином степени  $n$ , для которого 0 не является корнем, т.е.

$$P(z) = a_0(z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_p)^{m_p},$$

где  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$  – сумма кратностей корней  $z_j$  и  $z_i \neq z_j$  при  $i \neq j$  и  $z_j \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Вместе с полиномом  $P(z)$  рассмотрим рациональную функцию

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (1)$$

Здесь правая часть – разложение функции  $\frac{P'(z)}{P(z)}$  в ряд Тейлора в окрестности нуля.

По коэффициентам  $c_k$  ряда (1) строятся определители Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел  $(k, r)$ ,  $k \geq 0, r > 0$  определителем Адамара  $H_{k,r}$  называется определитель

$$H_{k,r} := \begin{vmatrix} c_k & c_{k+1} & \dots & c_{k+r-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \dots & c_{k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k+r-1} & c_{k+r} & \dots & c_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

**Лемма 1.** *Имеют место равенства:*

$$\text{при } r > p \ H_{k,r} = 0; \quad \text{и} \quad \frac{H_{k,p}}{H_{k+1,p}} = z_1 \cdot \dots \cdot z_p.$$

А при  $r < p$  справедлива

**Теорема 1.** *Пусть  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_r| < |z_{r+1}| \leq |z_{r+2}| \leq \dots \leq |z_p|$ . Тогда*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}} = z_1 \cdot \dots \cdot z_r.$$

*При этом*

$$\left| \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}} - z_1 \cdot \dots \cdot z_r \right| < Cq^k,$$

*где*

$$0 < q = \frac{|z_r|}{|z_{r+1}|} < 1.$$

**Теорема 2.** *Пусть  $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_r| = |z_{r+1}| \leq |z_{r+2}| \leq \dots \leq |z_p|$ . Тогда не существует предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{H_{k,r}}{H_{k+1,r}}$ .*

Вышеприведённые результаты позволяют вычислять корни многочлена  $P(z)$ , начиная с наименьшего по модулю  $0 < |z_1| < |z_2| < \dots$ . Аналогичная процедура вычисления корней полинома, начиная с наибольшего по модулю осуществляется на базе разложения функции  $\frac{P'(z)}{P(z)}$  в ряд Лорана в окрестности бесконечности (т.е. для  $|z| > \max_{1 \leq j \leq p} |z_j|$ )

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z - z_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}}, \quad (2)$$

с помощью соответствующих определителей Адамара. А именно, для каждой пары натуральных чисел  $(k, r)$ ,  $k \geq 0, r > 0$  определителем Адамара  $\mathbf{H}_{k,r}$  (для ряда (2)) называется определитель

$$\mathbf{H}_{k,r} := \begin{vmatrix} b_k & b_{k+1} & \dots & b_{k+r-1} \\ b_{k+1} & b_{k+2} & \dots & b_{k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k+r-1} & b_{k+r} & \dots & b_{k+2(r-1)} \end{vmatrix}.$$

**Лемма 2.** *Имеют место равенства:*

$$\text{при } r > p \quad \mathbf{H}_{k,r} = 0; \quad \text{и} \quad \frac{\mathbf{H}_{k+1,p}}{\mathbf{H}_{k,p}} = z_1 \cdot \dots \cdot z_p.$$

А при  $r < p$  справедлива

**Теорема 3.** *Пусть  $|z_p| \geq |z_{p-1}| \geq \dots \geq |z_{p-r+1}| > |z_{p-r}| \geq |z_{p-r-1}| \geq \dots \geq |z_1| > 0$ . Тогда*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}} = z_{p-r+1} \cdot \dots \cdot z_p.$$

*При этом*

$$\left| \frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}} - z_{p-r+1} \cdot \dots \cdot z_p \right| < Cq^k,$$

где

$$0 < q = \left| \frac{z_{p-r}}{z_{p-r+1}} \right| < 1.$$

**Теорема 4.** *Пусть  $|z_p| \geq |z_{p-1}| \geq \dots \geq |z_{p-r+1}| = |z_{p-r}| \geq |z_{p-r-1}| \geq \dots \geq |z_1| > 0$ . Тогда не существует предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H}_{k+1,r}}{\mathbf{H}_{k,r}}$ .*

Доказательства этих результатов и просчёт на их базе конкретных примеров вычисления всех корней полиномов представлены в [1].

Исследование А. В. Лебедева выполнено при финансовой поддержке ГПНИ “Конвергенция-2030”. Исследование М. М. Чернявского выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф25М-063.

### Литература

1. Лебедев, А. В., Трубников, Ю. В., Чернявский, М. М. Об определителях Адамара и Вандермонда и методе Бернулли–Эйлера–Лагранжа–Эйткена вычисления корней полиномов / А. В. Лебедев, Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Математические заметки. – 2024. – Т. 116, Вып 1. – С. 91–108.

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ПРИ РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

Д.Е. Мармыш

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние однородного кругового цилиндра длины  $L$  и радиусом основания  $R$ . Введем цилиндрическую систему координат  $Or\varphi z$ , совместив ось  $Oz$  с осью тела (рис. 1).

Компоненты вектора перемещений точек тела обозначим через  $u$ ,  $v$  и  $w$  в направлении осей  $r$ ,  $\varphi$  и  $z$ , соответственно. Задача рассматривается в осесимметричной постановке, соответственно компоненты вектора перемещений не будут зависеть от угловой координаты  $\varphi$ . Решение будем искать только для радиальных  $u(r, z)$  и осевых перемещений  $w(r, z)$ . В работе [1] показано, что функции  $u(r, z)$  и  $w(r, z)$  удовлетворяют следующим равенствам

$$\left(\Delta_1 + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)^2 u = 0, \quad \left(\Delta_0 + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)^2 w = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_\nu$  – дифференциальный оператор Бесселя, определяемый как

$$\Delta_\nu = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2.$$

Граничные условия для функции осевых перемещений  $w(r, z)$  получим из условий отсутствия перемещений вдоль оси  $Oz$  при  $z = 0$  и заданному значению осевых смещений или деформаций при  $z = L$ . Таким образом, получаем следующие условия

$$w(r, 0) = 0, \quad w(r, L) = -w_L \text{ или } \left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=L} = \varepsilon_L. \quad (2)$$

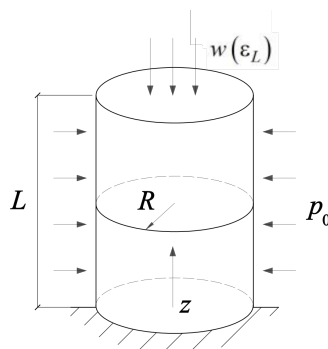


Рис. 1. К постановке задачи

Для функции осевых перемещений ставятся следующие два граничных условия: 1) при  $r = R$  радиальные напряжения  $\sigma_r = -p_0$ , где  $p_0$  – величина равномерно распределенного давления, действующего на стенку цилиндра вдоль его образующей; 2) отсутствие касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  при  $z = 0$ , т.е.  $\sigma_{rz}(r, 0) = 0$ .

Решение задачи находится с помощью преобразования Ханкеля с индексами 0 и 1 для функций  $w$  и  $u$ , соответственно [2, 3]. Применение преобразования Ханкеля  $H_0\{\cdot\}$  ко

второму выражению в (1) и подстановка граничных условий (2) приводит к следующему выражению для образа функции  $w$

$$\bar{w}_0(s, z) = -\frac{zw_L \delta(s)}{sL} e^{sz}, \quad (3)$$

где  $\delta(s)$  – дельта-функция Дирака.

Применение обратного преобразования Ханкеля  $H_0^{-1}\{\cdot\}$  к (3) дает выражение для функции осевых перемещений точек цилиндра  $w(r, z) = -\frac{zw_L}{L} [1 - h(L - z)]$ , где  $h(z)$  – функция Хевисайда.

Предположив, что функция радиальных перемещений на нижнем торце цилиндра при  $z = 0$  имеет линейный вид  $u(r, 0) = -kr$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности и применив преобразование Ханкеля  $H_1\{\cdot\}$  к первому выражению в (1), получим [4]

$$\bar{u}_1(s, z) = \left[ -\frac{kR^2}{s} J_2(sR) + zD \right] e^{-sz}, \quad (4)$$

где  $J_2(sR)$  – функция Бесселя 2-го порядка.

Применив к (4) обратное преобразования Ханкеля  $H_1^{-1}\{\cdot\}$ , получим

$$u(r, z) = -kR^2 \int_0^\infty s J_2(sR) \left( \frac{1}{s} + z \right) e^{-sz} J_1(sr) ds. \quad (5)$$

Интеграл (5) может быть вычислен численно либо также представлен в виде свертки двух функций. Приняв в (5)  $\bar{f}_1(s, z) = (1/s + z) e^{-sz}$  и  $\bar{f}_2(s, z) = J_2(sR)$ , тогда [5]

$$4\pi H_1^{-1}\{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2\} = (f_1 \star f_2)(r, z),$$

где  $f_1(r, z) = H_1^{-1}\{\bar{f}_1(s, z)\} = \frac{1}{r} + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \left( \frac{r}{r^2 + z^2} - \frac{1}{r} \right);$

$$f_2(r, z) = H_1^{-1}\{\bar{f}_2(s, z)\} = G_{2,2}^{1,1} \left( \frac{R^2}{r^2}; \begin{matrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right) - G\text{-функция Мейера.}$$

### Литература

1. Соляник-Красса, К. В. Осесимметричная задача теории упругости / К. В. Соляник-Красса. – М.: Стройиздат, 1987. – 336 с.
2. Poularikas, A. D. Transforms and applications handbook / A. D. Poularikas. – 3rd ed. – CRC Press, 2010. – 912 p.
3. Ike, Ch. Hankel transform method for solving axisymmetric elasticity problems of circular foundation on semi-infinite soils / Ch. Ike // Int. J. of Engineering and Technology. – Vol. 10, No. 2. – 2018. – P. 549–564.
4. Gradshteyn, I. S. Table of integrals, series, and products / I. S. Gradshteyn. – Academic Press, 2014. – 1206 p.
5. Tuan, V. K. Convolution of Hankel transform and its application to an integral involving Bessel functions of first kind / V. K. Tuan, M. Saigo // Int. J. Math. & Math. Sci. – Vol. 18, No. 3, 1995. – P. 545–550.

## ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.А. Махамуд, Э.Л. Шишкина

Преобразования Фурье и Лапласа являются одними из ключевых методов в исследовании множества задач математического анализа, особенно в области дифференциальных уравнений. Однако их применение часто ограничивается дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Поэтому, хотелось бы иметь интегральное преобразование, позволяющее решать дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами и сохраняющее основные свойства преобразований Фурье и Лапласа.

Пусть  $I = (0, \ell)$ , где  $0 < \ell \leq \infty$  – заданный интервал на вещественной прямой, и пусть  $\omega(x) > 0$  – неотрицательная локально суммируемая на  $I$  весовая функция. Рассмотрим оператор с переменными коэффициентами вида  $P = \frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx} \omega(x) \frac{d}{dx}$ . Методы решения задач Штурма-Лиувилля с такими операторами изложены в [1,2].

Мы будем использовать следующую запись:  $(f, g)_\omega = \int_0^\ell f(x) \overline{g(x)} \omega(x) dx$ .

Обозначим через  $L_\omega^p(I)$  пространство всех измеримых функций  $f$  таких, что  $|f|^p \omega \in L^1(I)$ , с нормой, заданной формулой:

$$\|f\|_{p,\omega} = \|f\omega^{1/p}\|_{L^p} = \left( \int_0^\ell |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть  $f, g \in L_\omega^2(I)$  и дважды непрерывно дифференцируема на  $I$ . Для меры  $\omega(x)dx$  и оператора  $P = \frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx} \omega(x) \frac{d}{dx}$  справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_0^\ell (Pf)(x)g(x)\omega(x)dx = \omega(x)(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))\Big|_0^\ell + \int_0^\ell f(x)(Pg)(x)\omega(x)dx.$$

Построим интегральное преобразование вида  $\mathcal{J}_\omega\{f(x)\}(\xi) = \int_0^\infty f(x)K(x, \xi)\omega(x)d\xi$ , приспособленное для работы с оператором  $P$ . Для такого преобразования ядро  $K(x, \xi)$  будет связано с оператором  $P$  равенством

$$(P_x K)(x, \xi) = \kappa \xi^2 K(x, \xi), \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

при условиях

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \omega(x)K(x, \xi) = a_0(\xi), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \omega(x)K'_x(x, \xi) = a_1(\xi), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x)K(x, \xi) = 0.$$

Для удобства обычно берут  $\kappa = \pm 1$ .

**Теорема.** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция, дважды дифференцируемая на любом отрезке вида  $[0, A]$ , такая, что

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \omega(A)f(A)K'_x(x, \xi)|_{x=A} = 0, \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \omega(A)f'(A)K(A, \xi) = 0,$$

такая, что  $Pf$  является кусочно-непрерывной с односторонними пределами на любом указанном отрезке вида  $[0, A]$ . Тогда  $\mathcal{I}_\omega\{Pf(x)\}(\xi)$  существует и

$$\mathcal{I}_\omega\{Pf(x)\}(\xi) = \kappa \xi^2 \mathcal{I}_\omega\{f(x)\}(\xi) + a_1(\xi)f(+0) - a_0(\xi)f'(0+).$$

**Пример.** Самым хорошо изученным оператором вида  $P = \frac{1}{\omega(x)} \frac{d}{dx} \omega(x) \frac{d}{dx}$  является оператор Бесселя  $B_\gamma = \frac{1}{x^\gamma} \frac{d}{dx} x^\gamma \frac{d}{dx}$ . В этом случае  $\omega(x) = x^\gamma$ ,  $\ell = +\infty$ . При  $\kappa = 1$ ,  $a_0(\xi) = 0$ ,  $a_1(\xi) = -2^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \xi^{\frac{1-\gamma}{2}}$  решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{x^\gamma} \frac{d}{dx} x^\gamma \frac{d}{dx} K(x, \xi) = \xi^2 K(x, \xi), & \kappa \in \mathbb{R}; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x^\gamma K(x, \xi) = 0, & \lim_{x \rightarrow 0+} x^\gamma K'_x(x, \xi) = -1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\gamma K(x, \xi) = 0. \end{cases}$$

имеет вид

$$K(x, \xi) = x^{\frac{1-\gamma}{2}} K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi).$$

Так построенное ядро порождает преобразование Мейера [3]

$$\mathcal{K}_\gamma[f](\xi) = \int_0^\infty x^{\frac{\gamma+1}{2}} K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi) f(x) dx$$

для которого справедлива формула

$$\mathcal{K}_\gamma[B_\gamma f](\xi) = \xi^2 \mathcal{K}_\gamma[f](\xi) - 2^{\frac{\gamma-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \xi^{\frac{1-\gamma}{2}} f(0+).$$

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 25-21-00830).

### Литература

1. Everitt, W.N. A Catalogue of Sturm-Liouville Differential Equations / W. N. Everitt // In: Amrein W.O., Hinz A.M., Pearson D.P. (eds) Sturm-Liouville Theory. – Birkhauser Basel, 2005. – P. 271–331.
2. Kravchenko, V.V. Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems: A Method of Solution / V.V. Kravchenko. – Birkhäuser Cham, 2020. – 154 p.
3. Karimov, S., Shishkina, E. Existence and uniqueness of solutions to problem with fractional Bessel derivatives / S. Karimov, E. Shishkina // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – P. 1–15.

## ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ, МИНУЯ ФОРМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

**В. М. Овсянников**

Законы физики часто формулируются в виде алгебраических формул. Постановка задач математической физики производится в виде системы дифференциальных уравнений

с граничными и начальными условиями. Конечно-разностные уравнения, предшествующие выводу дифференциальных уравнений, иногда содержат большую информацию, чем получающееся из него дифференциальное уравнение. При совершении предельных переходов для вывода волнового уравнения могут теряться члены высокого порядка малости, несущие важный физический смысл. Об этом знал и Коши — соавтор теории пределов. Поскольку современное решение дифференциальных уравнений производится разностными численными методами в виде конечно-разностных уравнений, то существенного увеличения сложностей решения задач, составленных из конечно-разностных уравнений вместо дифференциальных не ожидается. А новые подробности поведения жидкости в результате решения могут быть получены.

Сформулированные выше положения продемонстрируем на примере уравнения неразрывности жидкости или газа — дивергенция вектора скорости равна нулю. В таком виде без учета деформаций сдвига уравнение неразрывности преподается в высшей школе и используется в инженерных расчетах. Но в 1752 г. Эйлер сделал вывод уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости деформированием контрольной фигуры, например квадрата или куба, деформациями сжатия-растяжения и сдвига. Полученное им уравнение в современных обозначениях включает три инварианта тензора скоростей деформаций  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + (t - t_0)I_2 + (t - t_0)^2 I_3 = 0$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — компоненты вектора скорости вдоль осей координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Первым инвариантом  $I_1$  является дивергенция вектора скорости. Второй инвариант:

$$I_2 = \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \right]$$

Третьим инвариантом  $I_3$  является якобиан третьего порядка. Такое уравнение неразрывности может рассматриваться как конечно-разностное, так как содержит приращение времени  $t - t_0$ .

В 2006 г. было выписано аналогичное уравнение неразрывности для нестационарного течения сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + (t - t_0)\rho I_2 + (t - t_0)^2 \rho I_3 = 0$$

С его использованием было выведено методом акустической аналогии Лайтхилла неоднородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0)^2 \rho_0 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

Здесь  $p$  обозначает волновое давление,  $c_0$  — скорость звука,  $\rho_0$  — термодинамическую плотность. Второй и третий инварианты вошли в неоднородную часть волнового уравнения и оказались генераторами возникновения волн.

При решении задачи течения жидкости конечно-разностным методом по уравнению неразрывности, записанном в конечно-разностном виде с учетом второго инварианта, можно ожидать появления в нестационарном решении длинноволновых колебаний, отражающих действительное поведение сжимаемой среды. Третий инвариант генерирует волны типа ударной волны Жуковского.

## Литература

1. Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756–1757). Р. 271–311 = Opera omnia, ser. II. V. 13. Р. 1–369.
2. Leonhardi Euleri. Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius. Edidit C. A. Truesdell. Lausannae, 1954.
3. Leonhardi Euleri. Principia motus fluidorum. Эйлер Л. Принципы движения жидкостей. Перевод с латыни начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН Ивановой Е. В., Овсянникова В. М. – М.: Спутник +, 2018. 94 с.
4. Овсянников В. М. Уравнение неразрывности Леонарда Эйлера с учетом членов высокого порядка малости по времени. Тезисы докладов XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям Еругинские чтения – 2014. 20–22 мая 2014, Новополоцк, Беларусь. Часть 2. Институт математики НАН Беларуси, с. 102–103.
5. Овсянников В. М. Уравнение неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости. Обзор. Материалы XX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения». Новополоцк, 31 мая – 03 июня 2022 г. : Часть 2. — Новополоцк: Полоцкий государственный университет. 2022. С. 88–90.
6. Овсянников В. М. Сопоставление дополнительных слагаемых второго порядка малости для конечно-разностных уравнений Эйлера и малых добавок в регуляризованных уравнениях гидродинамики // ЖВМиМФ. – 2017. – Т. 57, № 5. – С. 876–880.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛИ ЦИРКУЛЯЦИИ ЧАСТИЦ НА ГРАФЕ

А.Н. Пичугина, Н.В. Перцев

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{x}_1(t) = r_1 - (\mu_1 + \gamma_1)x_1(t) + \sum_{\ell=1}^m e^{-\lambda_{21,\ell}\omega_{21,\ell}} \pi_{21,\ell} \gamma_2 x_2(t - \omega_{21,\ell}), \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 - (\mu_2 + \gamma_2)x_2(t) + \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_{12,k}\omega_{12,k}} \pi_{12,k} \gamma_1 x_1(t - \omega_{12,k}), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

дополненная нулевыми начальными данными

$$x_1(t) = 0, \quad t \in [-\omega_{12}, 0], \quad x_2(t) = 0, \quad t \in [-\omega_{21}, 0]. \quad (3)$$

В системе (1), (2) переменные  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – численности некоторой популяции частиц в вершинах графа, все параметры и запаздывания положительны,

$$\sum_{k=1}^n \pi_{12,k} = 1, \quad \sum_{\ell=1}^m \pi_{21,\ell} = 1, \quad \omega_{12} = \max_{1 \leq k \leq n} \{\omega_{12,k}\}, \quad \omega_{21} = \max_{1 \leq \ell \leq m} \{\omega_{21,\ell}\}.$$

Параметры и запаздывания имеют следующую интерпретацию. Параметры  $r_1$ ,  $r_2$  задают скорости притока частиц в вершины графа из внешних источников. Параметры  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  означают интенсивности гибели частиц, находящихся в вершинах графа, параметры  $\lambda_{12,k}$ ,  $\lambda_{21,\ell}$  – интенсивности гибели частиц, находящихся на ребрах графа и осуществляющих перемещение от одного ребра к другому. Параметры  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – интенсивности поступления

частиц из вершин графа на одно из соответствующих ребер, выбор которого задают доли  $\pi_{12,k}$ ,  $\pi_{21,\ell}$ . Запаздывания  $\omega_{12,k}$ ,  $\omega_{21,\ell}$  означают длительности перемещения частиц по соответствующему ребру графа. Начальные данные (3) означают, что в нулевой момент времени частицы изучаемой популяции отсутствуют. При  $t = 0$  в уравнениях (1), (2) используются правосторонние производные.

В приложениях система (1)–(3) может описывать локальную циркуляцию клеток различных типов и вирусных частиц в процессе развития инфекционного заболевания. Вершинами графа могут служить лимфатические узлы или некоторые органы, ребрами графа – лимфатические и кровеносные сосуды.

Обозначим:

$$\Delta = (\mu_1 + \gamma_1)(\mu_2 + \gamma_2) - \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2 > 0,$$

$$0 < \beta_1 = \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_{12,k}\omega_{12,k}} \pi_{12,k} < 1, \quad 0 < \beta_2 = \sum_{\ell=1}^m e^{-\lambda_{21,\ell}\omega_{21,\ell}} \pi_{21,\ell} < 1.$$

Система (1), (2) имеет положение равновесия

$$x_1^{(*)} = (r_1(\mu_2 + \gamma_2) + r_2\gamma_2\beta_2)\Delta^{-1} > 0,$$

$$x_2^{(*)} = (r_2(\mu_1 + \gamma_1) + r_1\gamma_1\beta_1)\Delta^{-1} > 0.$$

Решение  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  задачи Коши (1)–(3) существует, единственно, компоненты решения неотрицательны на промежутке  $t \in [0, \infty)$ , и выполнены следующие соотношения:

$$x_1^{(*)} - y_1^{(*)}e^{-\rho_* t} \leq x_1(t) \leq x_1^{(*)}, \quad (4)$$

$$x_2^{(*)} - y_2^{(*)}e^{-\rho_* t} \leq x_2(t) \leq x_2^{(*)}, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_1^{(*)}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = x_2^{(*)}.$$

В соотношениях (4), (5) константа  $\rho_*$  – единственный корень уравнения

$$\varphi_1(\rho) = \varphi_2(\rho), \quad 0 < \rho < \min\{\mu_1 + \gamma_1, \mu_2 + \gamma_2\}, \quad (6)$$

где функции  $\varphi_1(\rho)$ ,  $\varphi_2(\rho)$  имеют вид

$$\varphi_1(\rho) = (\mu_1 + \gamma_1 - \rho)(\mu_2 + \gamma_2 - \rho), \quad \rho \geq 0,$$

$$\varphi_2(\rho) = \gamma_1\gamma_2 \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_{12,k}\omega_{12,k}} \pi_{12,k} e^{\rho\omega_{12,k}} \sum_{\ell=1}^m e^{-\lambda_{21,\ell}\omega_{21,\ell}} \pi_{21,\ell} e^{\rho\omega_{21,\ell}}, \quad \rho \geq 0,$$

а константы  $y_1^{(*)}$ ,  $y_2^{(*)}$  таковы:

$$y_1^{(*)} = \frac{(\mu_2 + \gamma_2 - \rho_*)y_2^{(*)}}{\sum_{k=1}^n e^{-\lambda_{12,k}\omega_{12,k}} \pi_{12,k} e^{\rho_*\omega_{12,k}} \gamma_1} > 0,$$

$$y_2^{(*)} = \max \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n e^{-\lambda_{12,k}\omega_{12,k}} \pi_{12,k} e^{\rho_*\omega_{12,k}} \gamma_1}{\mu_2 + \gamma_2 - \rho_*} x_1^{(*)}, x_2^{(*)} \right\} > 0.$$

Корень  $\rho_*$  уравнения (6) может быть найден с привлечением простейших численных методов, например, с помощью метода деления отрезка пополам.

Представленная система дифференциальных уравнений и результаты ее исследования опираются на подходы, изложенные в работах [1], [2].

### Литература

1. Pertsev, N. V. Application of Differential Equations with Variable Delay in the Compartmental Models of Living Systems /N. V. Pertsev // J. Appl. Ind. Math. – 2021. – Vol. 15, № 3. – P. 466–482.
2. Перцев, Н. В. Нахождение параметров экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием / Н. В. Перцев, К. К. Логинов // Сиб. электр. матем. изв. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 1307–1318.

## МНОГОФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И НЕЙТРАЛЬНОСТЬ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА ПО ХИКСУ

А.Ф. Проневич, Г.А. Хацкевич, М.В. Чайковский

Рассмотрим динамическую многофакторную производственную функцию (ПФ)

$$y = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in G \times \mathbb{R}_+, \quad G \subset \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где  $y$  — выпуск продукции,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  есть вектор затрат производственных ресурсов,  $t$  — параметр времени из числового луча  $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ , каждое значение которого выражает определенный уровень научно-технического прогресса (НТП), а неотрицательная функция  $f$  является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве  $G \times \mathbb{R}_+$ .

Цель данной работы — предложить концепции *нейтральности*, *расширенной нейтральности* и *полной нейтральности по Хиксу* в многофакторном случае (для случая  $n = 2$  см., например, работы [1 – 4]), установить функциональные связи между ними и разработать аналитические формы ПФ вида (1), учитывающие нейтральный, расширенно нейтральный и полностью нейтральный по Хиксу НТП. Способ построения динамических многофакторных ПФ основан на нахождении решений систем уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик. Статья продолжает исследования авторов [3 – 7] по изучению аналитических форм динамических ПФ, обладающих заданными экономико-математическими характеристиками [8, с. 47 – 77].

Будем говорить, что НТП является: 1) *нейтральным по Хиксу относительно факторов производства*  $x_i$  и  $x_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ ,  $k \leq n$ , если предельная норма технического замещения  $MRTS_{ij}(f)$  фактора производства  $x_i$  фактором  $x_j$  не изменяется с течением времени при фиксированном отношении рассматриваемых факторов, т.е.

$$MRTS_{ij}(f) = \frac{\partial_{x_i} f(x, t)}{\partial_{x_j} f(x, t)} = \text{const} \quad \text{при} \quad \frac{x_j}{x_i} = \text{const};$$

2) *расширенно нейтральным по Хиксу относительно факторов*  $x_i$  и  $x_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ ,  $k \leq n$ , если предельная норма замещения  $MRTS_{ij}$  не зависит от параметра  $t$  НТП; Если условие нейтральности выполняется при всех индексах  $i, j = 1, \dots, k$ ,  $i \neq j$ ,  $k \leq n$ , то скажем, что НТП является *нейтральным* (*расширенно нейтральным*) *по Хиксу относительно факторов производства*  $x_1, \dots, x_k$ , а при  $k = n$  — *нейтральным по Хиксу*; 3) НТП назовем *полностью нейтральным по Хиксу относительно факторов* производства  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k \leq n$ , если для ПФ (1), учитывающей этот НТП, верна система тождеств

$$\partial_{x_i} \ln f(x, t) = \varphi_i(x) \quad \forall (x, t) \in G \times \mathbb{R}_+, \quad i = 1, \dots, k, \quad k \leq n,$$

где  $\varphi_i$  — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые не зависят от параметра НТП  $t$ . При  $k = n$  будем говорить о полностью нейтральном по Хиксу НТП [1].

Так, например, для многофакторной ПФ (1) имеют место следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает нейтральный по Хиксу относительно факторов производства  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k \leq n$ , НТП тогда и только тогда, когда многофакторную ПФ (1) можно представить в одной из аналитических форм*

$$f_1(x, t) = \Phi(x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k}, x_{k+1}, \dots, x_n, t), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$f_2(x, t) = \Phi(a_1 x_1^{1-\gamma} + \dots + a_k x_k^{1-\gamma}, x_{k+1}, \dots, x_n, t), \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

где  $\Phi$  — произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция.

**Теорема 2.** *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает расширенно нейтральный по Хиксу относительно факторов производства  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k \leq n$ , НТП тогда и только тогда, когда она представима в форме  $f(x, t) = \Phi(\Psi(x), x_{k+1}, \dots, x_n, t)$ , где функции  $\Phi$  (неотрицательная) и  $\Psi$  являются непрерывно дифференцируемыми.*

**Теорема 3.** *Динамическая многофакторная ПФ (1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу относительно факторов производства  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k \leq n$ , НТП тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде  $f(x, t) = A(x_{k+1}, \dots, x_n, t) \cdot \Lambda(x)$ , где  $A$  и  $\Lambda$  — некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции.*

**Теорема 4.** *Динамическая ПФ (1), учитывающая полностью нейтральный по Хиксу НТП относительно факторов  $x_1$  и  $x_2$ , будет также учитывать и нейтральный по Хиксу относительно факторов  $x_1$  и  $x_2$  НТП, если и только если ее можно представить в аналитической форме  $f(x, t) = A(x_3, \dots, x_n, t) \cdot H(\Psi(x_1, x_2), x_3, \dots, x_n)$ , где  $A$  и  $H$  — некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а  $\Psi$  есть линейно-однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных.*

**Теорема 5.** *ПФ (1), учитывающая полностью нейтральный по Хиксу относительно факторов  $x_1, \dots, x_k$  НТП, будет также учитывать и нейтральный по Хиксу относительно факторов  $x_1, \dots, x_k$  ( $k > 2$ ,  $k \leq n$ ), НТП, если и только если ПФ (1) можно представить в одной из двух форм  $f_1(x, t) = A(x_{k+1}, \dots, x_n, t) \cdot H(x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\alpha_k}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ , или  $f_2(x, t) = A(x_{k+1}, \dots, x_n, t) \cdot H(a_1 x_1^{1-\gamma} + \dots + a_k x_k^{1-\gamma}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ,  $\alpha_i, a_i \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , где  $A$  и  $H$  — некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции.*

Работа выполнена при поддержке БРФФИ в рамках НИР «Экономико-математическое моделирование научно-технического прогресса в контексте производственных функций для прогнозирования экономического роста Республики Беларусь», № ГР 20221093.

### Литература

1. Blackorby, Ch. Extended Hicks neutral technical change / Ch. Blackorby, C. A. K. Lovell, M. C. Thursby // The Economic Journal. – 1976. – Vol. 35, No. 344. – P. 845–852.
2. Проневич, А. Ф. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Белорусский экономический журнал. – 2020. – № 3. – С. 87–105.
3. Проневич, А. Ф. Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу / А. Ф. Проневич // Вестник ЦЭМИ РАН. – 2020. – № 3. – С. 4–27.
4. Хацкевич, Г. А. Классификация Сато – Бекмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. – 2020. – № 2. – С. 4–17.
5. Проневич, А. Ф. Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-

технический прогресс / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Вестник института экономики НАН Беларуси. – 2022. – Вып. 4. – С. 9–27.

6. Проневич, А. Ф. О производственных функциях, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу, Харроду и Солоу научно-технический прогресс / А. Ф. Проневич // Экономика и математические методы. – 2023. – Т. 59, № 1. – С. 23–28.

7. Проневич, А. Ф. Концепция нейтральности научно-технического прогресса по Хиксу для многофакторных производственных функций / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Экономика, моделирование, прогнозирование. – 2023. – Вып. 17. – С. 84–93.

8. Клейнер, Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАМКНУТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В МАРКОВСКОЙ СРЕДЕ

Т.В. Русилко

Исследование посвящено асимптотическому анализу нагруженной заявками замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания (СеМО), функционирующей в марковской случайной среде. Такая сеть может быть использована в качестве аналитической модели сложных систем или процессов, связанных с обработкой заданий и их очередями. В частности, такая СеМО используется в качестве математической модели информационно-телекоммуникационных систем и сетей, состоящих из разнородных подсистем.

Рассматривается однородная замкнутая экспоненциальная СеМО, состоящая из  $n + 1$  узлов, между которыми циркулирует фиксированное число  $K$  заявок. Узлы с номерами  $1, 2, \dots, n$  представляют собой СМО с  $m_i$  идентичными экспоненциальными обслуживающими устройствами и накопителем неограниченной емкости. Кроме того, в сети имеется нулевой узел, выполняющий роль "источника-стока". Нулевой узел состоит из  $K$  идентичных экспоненциальных обслуживающих устройств. Дисциплина обслуживания заявок в узлах – FIFO. Заявка, обслуженная узлом номер  $i$ , мгновенно с вероятностью  $p_{ij}$  направляется в узел номер  $j$ , матрица  $P = (p_{ij})_{i,j=\overline{0,n}}$  неразложима и  $p_{ii} = 0$ ,  $i = \overline{0,n}$ .

Пусть СеМО функционирует в марковской среде, определяемой случайным процессом  $\alpha(t)$ , который управляет параметром интенсивности обслуживания в каждом из узлов сети. Процесс  $\alpha(t)$  – это цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний  $1, 2, \dots, N$ , которая задана матрицей инфинитезимальных характеристик  $Q = (q_{\alpha\alpha'})_{\alpha,\alpha'=\overline{1,N}}$ . Зададим набор неотрицательных чисел  $\lambda^{(\alpha)}$ ,  $\mu_i^{(\alpha)}$ ,  $\alpha \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Процесс обслуживания в узлах сети модулируется цепью Маркова  $\alpha(t)$ : если в момент времени  $t$  процесс  $\alpha(t)$  находится в состоянии  $\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, \dots, N\}$ , то IS-узел является узлом с параметром  $\lambda^{(\alpha)}$ , а узел с номером  $i$  – узлом с параметром  $\mu_i^{(\alpha)}$ .

Состояние такой СеМО определяется расширенным  $(n + 1)$ -мерным случайным вектором:

$$(k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t), \alpha(t)) = (\mathbf{k}(t), \alpha(t)), \quad (1)$$

где компонента  $k_i(t)$  – число заявок, находящихся в очереди и на обслуживании в узле номер  $i$  в момент времени  $t$ ,  $i = \overline{1,n}$ , компонента  $\alpha(t)$  определяет состояние случайной среды. Процесс (1) – это марковский случайный процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний.

В результате применения асимптотического метода анализа такой сети в условиях большой нагрузки, когда число заявок  $K$  стремится к бесконечности, получено аппроксимирующее обобщенное уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности распределения нормированного вектора числа заявок в узлах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) p_\alpha(\mathbf{x}, t) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( B_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) p_\alpha(\mathbf{x}, t) \right) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha\alpha} p_\alpha(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2)$$

с коэффициентами сноса

$$A_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \mu_j^{(\alpha)} \min \left( \frac{m_j}{K}, x_j \right) (p_{ji} - \delta_{ij}) + \lambda^{(\alpha)} \left( 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right) p_{0i} \quad (3)$$

и коэффициентами диффузии

$$\begin{aligned} B_{ii}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{K} \sum_{j=1}^n \mu_j^{(\alpha)} \min \left( \frac{m_j}{K}, x_j \right) (p_{ji} + \delta_{ij}) + \\ & + \frac{1}{K} \lambda^{(\alpha)} \left( 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right) p_{0i}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$B_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{K} \mu_i^{(\alpha)} \min \left( \frac{m_i}{K}, x_i \right) p_{ij}, \quad i \neq j, \quad (5)$$

здесь  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера,  $i, j = \overline{1, n}$ .

Коэффициенты сноса  $A_i^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$  характеризуют мгновенную скорость изменения нормированного случайного процесса  $\xi(t) = \mathbf{k}(t)/K$  при условии  $\alpha(t) = \alpha$ . Коэффициенты диффузии  $B_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$  характеризуют мгновенную скорость изменения ковариации процесса  $\xi(t)$  при условии  $\alpha(t) = \alpha$ . Последнее слагаемое в (2) описывает переток вероятностей между состояниями среды.

На основе полученных (2)–(5) осуществляется переход от стохастического уравнения Фоккера–Планка к детерминированным системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно первых и вторых моментов нормированного вектора состояния СеМО. Указанный переход позволяет определить такие характеристики эффективности функционирования сети, как среднее число заявок в ее узлах и ковариационные характеристики процессов в узлах.

### Литература

1. Rusilko, T. Asymptotic analysis of a closed queueing network in a Markov random environment / T. Rusilko, D. Salnikov // Operations Research Forum. – 2025. — Vol. 6, № 175. — P. 1–15.
2. Rusilko, T. V. Queueing network model of a call center with customer retrials and impatient customers / T. V. Rusilko, A. V. Pankov // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Т. 24, № 2. – С. 287–297.

3. Русилко, Т. В. G-сеть как стохастическая модель сети передачи данных / Т. В. Русилко // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 45–54.

## О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ ММРР-ПОТОКОМ

С.Э. Статкевич

При исследованиях сетей массового обслуживания (СеМО) с различными особенностями, как в стационарном [1–3], так и переходном режиме [4], предполагается, что поток заявок, поступающих в сеть, является простейшим (пуассоновским). Такие сети, как указано в работах [5, 6], являются адекватными моделями различных информационно-телекоммуникационных систем и сетей, систем документооборота, страховых компаний и др. В современных исследованиях широкое применение находят модели, основанные на марковском модулированном пуассоновском потоке (ММРР), которые позволяют моделировать «пульсирующий» трафик, характеризующийся неравномерной интенсивностью с периодически возникающими пиковыми нагрузками.

В докладе рассматривается методика нахождения вероятностей состояний открытой однородной экспоненциальной сети массового обслуживания произвольной структуры, в которой внешняя среда соответствует IS (Infinite Server)-узлу, генерирующему ММРР-поток.

Обозначим через  $m_i$  – общее число линий обслуживания в системе  $S_i$ , время обслуживания заявок в каждой из которых распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\mathbf{k}(t) = (k_1(t), \dots, k_n(t))$  –  $n$ -вектор, определяющий размещение заявок по узлам сети  $S_1, \dots, S_n$ ;  $k_i(t)$  – число заявок в  $i$ -м узле в момент времени  $t$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Данный процесс представляет собой цепь Маркова с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Случайный процесс  $r(t)$ , управляющий поступающим в СеМО потоком заявок, является процессом с инфинитезимальными характеристиками, значения которого определяют значения процесса  $\mathbf{k}(t)$ , т.е. параметрически зависит от  $r(t)$ . В свою очередь случайный процесс  $\mathbf{k}(t)$  не определяет значения процесса  $r(t)$ , т.е.  $r(t)$  параметрически не зависит от  $\mathbf{k}(t)$ . Тем самым можно сказать, что  $\mathbf{k}(t)$  вложен в  $r(t)$ .

ММРР-поток управляется случайным процессом  $r(t)$ , являющийся однородной цепью Маркова с конечным числом состояний  $1, 2, \dots, R$ , в которой возможны переходы из любого  $r$ -го состояния в три ближайших состояния:  $(r+1)$ ,  $r$ ,  $(r-1)$  с интенсивностями перехода  $\alpha_{r,r+1}$ ,  $(1 - \alpha_{r,r+1} - \beta_{r,r-1})$ ,  $\beta_{r,r-1}$ ,  $r = \overline{2, R}$ . Из состояния  $r = 1$  возможны два перехода – в 2 и 1 с интенсивностями  $\alpha_{1,2}$  и  $(1 - \alpha_{1,2})$  соответственно. Из состояния  $r = R$  осуществляется переход в состояния  $R$  и  $(R-1)$  с интенсивностями  $\beta_{R,R-1}$  и  $(1 - \beta_{R,R-1})$  соответственно. Кроме этого полагаем, что  $\alpha_{r,r+1} = \alpha$ ,  $\beta_{r,r-1} = \beta$ ,  $\beta_{R,R-1} = \beta$ ,  $r = \overline{1, R-1}$ . Также считаем, что однородная цепь Маркова  $r(t)$  изменяется во времени, а ее текущее состояние регулирует вероятностный закон поступления заявок: если в момент времени  $t \in [0, +\infty)$  процесс  $r(t)$  находится в состоянии  $r$ ,  $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ , то узел  $S_0$  является IS-узлом с параметром  $\lambda_r$ , где  $\lambda_r$  – интенсивность пуассоновского потока заявок, генерируемого IS-узлом. Набор неотрицательных чисел  $\lambda_r$ ,  $r \in \{1, 2, \dots, R\}$  считается заданным.

Считается, что СеМО находится в состоянии  $(\mathbf{k}, r, t)$ , если в момент времени  $t$  компоненты  $k_i(t) = k_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , образуют вектор  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  и управляющая ММРР-поток цепь Маркова  $r(t)$  пребывает в состоянии  $r$ .

Доказано, что вероятности состояний рассматриваемой сети, удовлетворяют системе разностно-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, r, t)}{dt} = & - \left[ \sum_{r=1}^R \lambda_r + \sum_{i=1}^n \mu_i \min(m_i, k_i) + \alpha + \beta \right] P(\mathbf{k}, r, t) + \\ & + \sum_{r=1}^R \lambda_r \sum_{i=1}^n p_{0i} u(k_i) P(\mathbf{k} - I_i, r, t) + \sum_{i=1}^n \mu_i \min(m_i, k_i + 1) p_{0i} P(\mathbf{k} + I_i, r, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \mu_i \min(m_i, k_i + 1) p_{ij} u(k_j) P(\mathbf{k} + I_i - I_j, r, t) + \\ & + \beta P(\mathbf{k}, r + 1, t) + \alpha P(\mathbf{k}, r - 1, t), \end{aligned}$$

где  $P = \|p_{ij}\|_{(n+1) \times (n+1)}$  стохастическая матрица переходов;  $I_i$  —  $n$ -вектор с нулевыми компонентами, за исключением компоненты с номером  $i$ , равной 1;  $u(x)$  — функция Хэвисайда.

Для решения полученной системы предлагается использовать метод многомерных производящих функций.

### Литература

1. Бородин, Н. Н. Характеристики суммарного объема требований в СеМО Джексона / Н. Н. Бородин, Ю. В. Малинковский // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2010. — № 1. — С. 25–32.
2. Малинковский, Ю. В. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR / Ю. В. Малинковский, А. Н. Старовойтов, А. Р. Еремина // Вестн. Томского гос. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. — 2009. — № 3. — С. 33–39.
3. Статкевич, С. Э. Об одном методе исследования НМ-сетей с ненадежными системами обслуживания и ограниченным временем ожидания разнотипных заявок / С. Э. Статкевич // Вестн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. — 2023. — № 3(13). — С. 129–140.
4. Маталыцкий, М. А. Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: моногр. / М. А. Маталыцкий, С. Э. Статкевич. — Гродно : ГрГУ, 2014. — 248 с.
5. Rusilko, T. V. Application of queueing network models in insurance / T. V. Rusilko // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — Т. 22, вып. 3. — С. 315–321.
6. Башарин, Г. П. Анализ очередей в вычислительных сетях: Теория и методы расчета / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган. — М : Наука, 1989. — 334 с.

## НЕЙРОСЕТЕВАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕДАКЦИОННОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА НА ОСНОВЕ ЭРГОДИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ–БЕЛЛМАНА

Д.А. Сьянов

Решение задачи оптимального управления массовым обслуживанием через диффузионное приближение опирается на нелинейное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

(Hamilton–Jacobi–Bellman, HJB). Ключевым препятствием для его традиционного численного интегрирования является экспоненциальная зависимость требуемого количества узлов сетки от размерности моделируемой системы [1]. В контексте управления редакционным документооборотом, где процессы подачи, рецензирования и принятия решений формируют непрерывно функционирующую стохастическую систему, естественным образом возникает эргодическая краевая задача HJB [2], ориентированная на минимизацию средней стоимости задержек в единицу времени. В настоящей работе рассматривается применение метода физически информированных нейронных сетей (Physics-Informed Neural Networks, PINN) [3] к эргодической задаче HJB, что позволяет аппроксимировать функцию ценности без экспоненциального роста сеточных узлов.

В рамках формализации предполагается, что  $M_t \in \mathbb{N}^n$  — маркировка стохастической сети Петри, описывающая текущее распределение рукописей по очередям (состояниям), а интенсивность каждого возможного перехода обозначена как  $\lambda_j(M_t, u_t)$ , где вектор  $u_t$  выступает в качестве агрегированного управляющего воздействия (макрополитики распределения ресурсов: рецензентов, редакторов). Система эволюционирует в соответствии со стохастическим генератором:

$$\mathcal{L}^u f(M) = \sum_j \lambda_j(M, u) [f(M + \nu_j) - f(M)], \quad (1)$$

где  $\nu_j$  — вектор изменения дискретной маркировки. При значительных потоках входящих документов ( $N \gg 1$ ) нормированная динамика системы  $X_t = M_t/N$ , согласно общим предельным результатам для семейств непрерывновременных марковских процессов [4], асимптотически сходится к предельному стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_t = F(X_t, u_t) dt + G(X_t, u_t) dW_t, \quad (2)$$

где  $F$ ,  $G$  определяются локальными интенсивностями переходов, а  $W_t$  — стандартный винеровский процесс. Отличительной чертой подхода является то, что параметры  $\lambda_j$  не являются фиксированными структурными константами: локальные матрицы дрейфа и диффузии  $(\hat{F}, \hat{G})$  извлекаются контекстно по историческим трейсам событий  $\sigma_{1:t}$  с помощью многоканального трансформера APS2V [5]. Полная схема синтеза: события OJS  $\xrightarrow{\text{APS2V}} (F, G) \xrightarrow{\text{Эргодич. HJB}} \nabla V \xrightarrow{\arg \min} u^*$ .

Для непрерывно функционирующих редакционных систем оптимизационная задача формулируется на бесконечном временном горизонте ( $T \rightarrow \infty$ ). В этой постановке естественным критерием является минимизация средней стоимости многоэтапных задержек  $\rho$  в единицу времени. Оптимальное макроскопическое управление  $u^*(x)$  определяется решением нелинейного эллиптического эргодического уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана:

$$\min_u [\mathcal{L}^u V(x) + c(x, u)] = \rho. \quad (3)$$

Компоненты непрерывного вектора состояний  $X_t$  интерпретируются как доли рукописей на этапах обработки, поэтому область определения уравнения (3) естественно ограничена единичным гиперкубом  $\Omega = [0, 1]^n$ . Краевые условия задаются явно: на границах, соответствующих заполнению физических буферов, используется условие Неймана  $\nabla V \cdot n = 0$  (отражение процесса), а на поглощающих гранях, связанных с завершением обработки рукописи, задаётся условие Дирихле  $V = 0$ . Поскольку гамильтониан

$$\mathcal{H} = F(x, u)^T \nabla V + \frac{1}{2} \text{tr}(GG^T \nabla^2 V) + c(x, u) \quad (4)$$

квадратично зависит от  $u$ , оптимальное управление  $u^*(x) = \arg \min_u \mathcal{H}$  восстанавливается аналитически.

При типичных размерностях  $n \geq 5$  прямое сеточное решение уравнения (3) становится непрактичным из-за экспоненциального роста числа узлов. Для аппроксимации функции ценности  $V(x; \theta)$  применяется метод физически информированных нейронных сетей: нейросеть минимизирует невязку уравнения в случайно выбранных точках  $\Omega$  и штрафы за нарушение граничных условий на  $\partial\Omega$ . Сходимость достигается за несколько тысяч итераций, после чего оптимальная политика восстанавливается из градиента и гессиана аппроксимированной функции ценности.

Полученная политика демонстрирует интерпретируемое поведение: управление стремится к нулю при низкой загрузке очередей и усиливается при приближении  $x_i$  к насыщению. Таким образом, сочетание эргодической постановки НЖВ, явных граничных условий и PINN-аппроксимации формирует строгий математический базис для адаптивной оптимизации редакционного документооборота.

Успешное преодоление «проклятия размерности» при численном интегрировании вырожденного эллиптического уравнения НЖВ прямым образом открывает путь к синтезу управлений в реальном времени. На практике предложенный подход позволяет внедрить решение НЖВ в виде интеллектуального модуля маршрутизации рукописей для платформы Open Journal Systems (OJS). Такая интеграция автоматизирует балансировку пула свободных рецензентов и снимает когнитивную нагрузку с редакторов, гарантируя математически обоснованный минимум средних задержек.

### Литература

1. Han, J. Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning / J. Han, J. Jentzen, E. Weinan // Proc. Natl. Acad. Sci. – 2018. – Vol. 115(34). – P. 8505–8510.
2. Arapostathis, A. Ergodic Control of Diffusion Processes / A. Arapostathis, S. V. Borkar, K. M. Ghosh // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. – Cambridge University Press. – 2011. – 323 p.
3. Raissi, M. Physics-informed neural networks / M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis // J. Comput. Phys. – 2019. – Vol. 378. – P. 686–707.
4. Kurtz, T. G. Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes / T. G. Kurtz // J. Appl. Prob. – 1970. – Vol. 7(1). – P. 49–58.
5. Сьянов, Д. А. Архитектура вероятностного трансформера для моделирования задержек в вероятностных процессах / Д. А. Сьянов // Информационные системы и технологии = Information Systems and Technologies : материалы XI Междунар. науч. конгр. по информатике (CSIST-2025), Респ. Беларусь, Минск, 29–31 окт. 2025 г. В 2 ч. Ч. 1 / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: С. В. Абрамеев (гл. ред.) [и др]. – Минск : БГУ, 2025. – С. 443–452.

## СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И КОММУТАТИВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ

А.Н. Таныгина

Рассматривается система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (1)$$

где  $A(t) = (a_{kl}(t))$  — матрица порядка  $n > 1$ , элементами которой являются комплекснозначные функции  $a_{kl}(t)$  ( $k, l = 1, 2, \dots, n$ ) вещественного аргумента  $t$ , непрерывные в своей области определения. Пусть  $t_0 \in \mathbb{R}$  — фиксированный момент времени,  $x_0 \in \mathbb{C}^n$ . Как известно (см., например, [1]), классическая формула

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\xi) d\xi} x_0 \quad (2)$$

для решения задачи Коши для системы (1) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  оказывается верной, если для любых  $t, s \in \mathbb{R}$  выполнено условие  $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ , т. е. значения  $A(t)$  лежат в коммутативной подалгебре  $\mathcal{A}$  матричной алгебры  $M_n(\mathbb{C})$ . Поэтому условия справедливости формулы (2) сводятся к описанию максимальных коммутативных алгебр матриц. Более того, можно рассматривать лишь несопряженные друг с другом неприводимые коммутативные алгебры (две алгебры  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  называются сопряженными, если составляющие их матрицы имеют одинаковый вид в некотором базисе, т. е. существует такая невырожденная матрица  $P \in M_n(\mathbb{C})$ , что  $P^{-1}\mathcal{A}_1P = \mathcal{A}_2$ ).

Описание общего вида матриц, принадлежащих коммутативной подалгебре алгебры  $M_n(\mathbb{C})$  при  $n = 2$  и  $n = 3$  было дано В.В. Морозовым [2], а при  $n = 4$  — Г.Н. Чеботаревым [3]. Независимо от них Б. Шарлем [4] были описаны все максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры для  $n = 2, 3, 4, 5$ . Случай  $n = 6$  был изучен в работе З.М. Дымента [5]. Д.А. Супруненко [6, 7] было доказано, что при  $n > 6$  алгебра  $M_n(\mathbb{C})$  содержит бесконечное число попарно несопряженных подалгебр класса  $\nu = 3$ .

Для  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  сводка всех максимальных попарно несопряженных неприводимых коммутативных подалгебр алгебры  $M_n(\mathbb{C})$  приведена в [7].

Одним из основных результатов теории коммутативных матричных алгебр является теорема И. Шура о том, что размерность коммутативной алгебры матриц  $n$ -го порядка не превышает числа  $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$ , причем граница  $\left[\frac{n^2}{4}\right] + 1$  является достижимой [8]. Другой важный результат был получен М.Ф. Кравчуком [9] и заключается в том, что все матрицы максимальной коммутативной нильпотентной алгебры  $\mathcal{N}$  матриц  $n$ -го порядка, имеющей нетривиальный аннулятор, одновременным преобразованием подобия приводятся к виду

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $A$  —  $s \times r$  матрица,  $B$  —  $s \times s$  матрица,  $C$  —  $r \times r$  матрица,  $D$  —  $r \times s$  матрица ( $n = 2r + s$ ,  $s \leq n - 2$ ). При этом для любых двух матриц  $X$  и  $\tilde{X}$  вида (3) выполняются равенства

$$B\tilde{A} = \tilde{B}A, \quad D\tilde{A} = \tilde{D}A, \quad D\tilde{B} = \tilde{D}B, \quad B\tilde{B} = \tilde{B}B.$$

Рассмотрим отображение  $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{B}$ , которое каждой матрице  $X$  вида (3) ставит в соответствие матрицу  $B$  в этом представлении. Данное отображение является гомоморфизмом алгебр  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{B}$ , поскольку  $\pi(X\tilde{X}) = \pi(X)\pi(\tilde{X})$ . Таким образом, изучение коммутативных алгебр матриц сводится к изучению коммутативных нильпотентных алгебр матриц меньшего порядка.

Обозначим через  $\mathcal{N}_0$  подмножество матриц из  $\mathcal{N}$  вида

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Пусть, далее,

$$\mathcal{B}^\perp = \{A \in M_{s \times r}(\mathbb{C}) : BA = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}\}, \quad {}^\perp\mathcal{B} = \{D \in M_{r \times s}(\mathbb{C}) : DB = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}\}.$$

Имеет место следующая структурная

**Теорема.** Каждая матрица множества  $\mathcal{N}_0$  представима в виде (4), где  $C$  — произвольная  $r \times r$  матрица ( $n = 2r + s$ ), а матрицы  $A$  и  $D$  удовлетворяют условиям  $A \in \mathcal{B}^\perp$ ,  $D \in {}^\perp\mathcal{B}$  и допускают следующую параметризацию:  $A(z) = (a_{pq}(z))$ ,  $D(z) = (d_{jk}(z))$ ,

$$a_{pq}(z) = \sum_{l=1}^{\rho} a_{pql} \xi_l, \quad d_{jk}(z) = \sum_{l=1}^{\rho} d_{jkl} \xi_l,$$

где  $a_{pql}$ ,  $d_{jkl}$ ,  $\xi_l \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq p$ ,  $k \leq s$ ,  $1 \leq q$ ,  $j \leq r$ ,  $1 \leq l \leq \rho \leq rs$ , причем элементы  $a_{pql}$  и  $d_{jkl}$  связаны равенствами

$$\sum_{k=1}^s d_{jk\mu} a_{kq\nu} = \sum_{k=1}^s d_{jk\nu} a_{kq\mu}, \quad 1 \leq j, \quad q \leq r, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq \rho.$$

### Литература

1. Забрейко, П. П. Функции от матриц и коммутативные матричные подалгебры: методическое пособие для студентов специальности 1-31 03 01-03 “Математика (экономическая деятельность)” / П. П. Забрейко, А. Н. Таныгина. — Минск : БГУ, 2011. — 95 с.
2. Морозов, В. В. О коммутативных матрицах / В. В. Морозов // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. — 1952. — Т. 112, кн. 9. — С. 17–20.
3. Чеботарев, Г. Н. К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы  $n$  пар функций / Г. Н. Чеботарев // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. — 1956. — Т. 116, кн. 4. — С. 31–58.
4. Charles, B. Sur l’algèbre des opérateurs linéaires / B. Charles // J. de Math. — 1954. — Vol. 33. — P. 81–145.
5. Дымент, З. М. Максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры матричной алгебры шестой степени / З. М. Дымент // Весці Акад. навук Беларус. ССР. Сер. фіз.-мат. навук. — 1966. — № 3. — С. 53–68.
6. Супруненко, Д. А. О максимальных коммутативных подалгебрах полной линейной алгебры / Д. А. Супруненко // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 3. — С. 181–184.
7. Супруненко, Д. А. Перестановочные матрицы / Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич. — Минск : Наука и техника, 1966. — 104 с.
8. Schur, J. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen / J. Schur // J. Crelle. — 1905. — Vol. 130. — P. 66–76.
9. Krawtchouk, M. Über vertauschbare Matrizen / M. Krawtchouk // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1927. — Vol. 51. — P. 126–130.

## ОБ ОДНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗАННЫХ ГИБРИДНЫХ ТЕ-ТЕ ВОЛН В ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

С.В. Тихов, М.А. Москалева, М.О. Снегур

Рассмотрим систему нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_1''(x) = -(a_1 - \lambda + \alpha_1 u_1^2(x) + \alpha_3 u_2^2(x))u_1(x), \\ u_2''(x) = -(a_2(x) - \lambda + \alpha_4 u_1^2(x) + \alpha_2 u_2^2(x))u_2(x), \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in [0, 1]$ ,  $a_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$  — постоянные,  $a_2(x) > 0$  — монотонно неубывающая функция и  $\lambda$  — вещественный параметр.

**Задача  $\mathcal{P}$ :** требуется найти такие значения параметров  $\lambda, A_1$ , при которых существуют решения  $u_1, u_2$  системы (1), удовлетворяющие условиям

$$u_j(0) = 0, \quad u_j'(0) = A_j, \quad u_j(1) = 0, \quad (2)$$

где параметр  $A_2$  связан с  $A_1$  соотношением

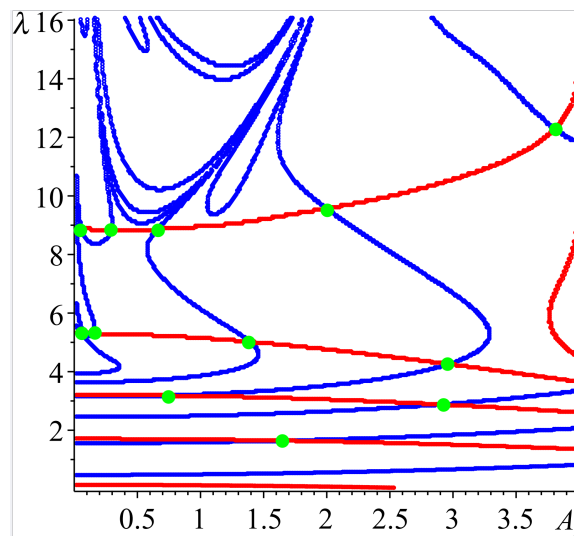
$$A_1^2 + A_2^2 = A^2, \quad A = \text{const}. \quad (3)$$

Такая задача возникает в теории нелинейных оптических волноводов и описывает распространение монохроматических *нелинейных связанных гибридных TE-TE* волн [1] в плоском экранированном нелинейном оптическом волноводе. Числа  $\lambda$ , удовлетворяющие задаче  $\mathcal{P}$ , отвечают *постоянным распространения* волновода, а функции  $u_1, u_2$  — компонентам электрического поля распространяющихся в нем волн.

Ясно, что пара чисел  $(\lambda, A_1)$  является решением задачи  $\mathcal{P}$ , если она удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} u_1(1; \lambda, A_1) = 0, \\ u_2(1; \lambda, A_2(A_1)) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где  $u_1, u_2$  — решения задачи Коши для системы (1) с первыми двумя парами условий из (2). Приближенные решения каждого из этих уравнений можно искать по отдельности, используя метод пристрелки, после чего выбрать те пары  $(\lambda, A_1)$ , которые удовлетворяют обоим уравнениям и, следовательно, являются решениями задачи  $\mathcal{P}$ .



**Рис. 1.** Приближенные решения задачи  $\mathcal{P}$ .

На рис. 1 представлены результаты приближенного решения задачи  $\mathcal{P}$ . Значения параметров в расчетах:  $a_1 = 4$ ,  $a_2(x) = 4 + 0.45x$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0.0001$ ,  $h = 10$ ,

$A = 4$ . Красные кривые на рис. 1 соответствуют решениям первого уравнения системы (4), а синие – решениям второго уравнения. Точки их пересечения – решения задачи  $\mathcal{P}$ .

Для доказательства существования решений задачи  $\mathcal{P}$  оказывается эффективным так называемый нестандартный метод возмущений, развитый в работах [2], [3]. Его суть состоит в том, что решения сложной нелинейной задачи ищутся вблизи решений более простой частной нелинейной задачи. Такую вспомогательную задачу – назовем ее  $\mathcal{P}'$  – можно получить, если в системе (1) положить  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .

Имеет место следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть задача  $\mathcal{P}'$  имеет  $n$  решений  $(\bar{\lambda}_k, \bar{A}_1^{(k)})$ , где  $k = \overline{1, n}$ . Тогда существуют постоянные  $\alpha_3^*, \alpha_4^* > 0$  такие, что для любых  $\alpha_3 < \alpha_3^*, \alpha_4 < \alpha_4^*$  задача  $\mathcal{P}$  имеет по крайней мере  $n$  решений  $(\hat{\lambda}_k, \hat{A}_1^{(k)})$ , причем всякая пара  $(\hat{\lambda}_k, \hat{A}_1^{(k)})$  содержится в окрестности точки  $(\bar{\lambda}_k, \bar{A}_1^{(k)})$  и  $(\hat{\lambda}_k, \hat{A}_1^{(k)}) \rightarrow (\bar{\lambda}_k, \bar{A}_1^{(k)})$  при  $\alpha_3, \alpha_4 \rightarrow +0$ .

Важно отметить, что если среди  $n$  решений задачи  $\mathcal{P}'$ , о которых идет речь в теореме 1, имеются нелинеаризуемые решения, то среди найденных при помощи нестандартного метода возмущений решений задачи  $\mathcal{P}$  также будут нелинеаризуемые решения. С физической точки зрения такие нелинеаризуемые решения отвечают новым режимам распространения электромагнитных волн в плоском волноводе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 25-71-10036).

### Литература

1. Smirnov, Yu. G. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik // Journal of mathematical physics. – 2013. – Vol. 54, № 8.
2. Dyundyaeva, A. A. Transverse electric guided wave propagation in a plane waveguide with kerr nonlinearity and perturbed inhomogeneity in the permittivity function / A. A. Dyundyaeva, S. V. Tikhov, D. V. Valovik // Photonics. – 2023. – Vol. 10, № 4. – P. 371.
3. Valovik, D. V. Mathematical theory of transverse-magnetic guided waves in a plane waveguide filled with nonhomogeneous nonlinear medium / D. V. Valovik, S. V. Tikhov // Nonlinearity. – 2025. – Vol. 38, № 7. – P. 75035.

## СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ НАНОЧАСТИЦ В МОДУЛИРОВАННОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

О.Б. Цехан, А.В. Станкевич, А.Ч. Свистун

При моделировании движения прозрачной сферической наночастицы в пространственно-модулированном лазерном луче под действием градиентной силы возникает начальная задача вида [1]

$$mz''(t) + bz'(t) + s \sin(2kz(t)) = 0, \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = v_0, \quad (1)$$

в которой уравнение динамики представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с синусоидальной нелинейностью и малым параметром при старшей производной. В (1)  $m \approx 10^{-19}$  кг – масса сферической наночастицы;  $b$  – коэффициент трения;  $s$  – амплитуда градиентной силы;  $k$  – волновое число. Уравнение (1) является сингулярно

возмущенным, поскольку при  $m = 0$  порядок уравнения понижается и его решение не может удовлетворять всем начальным условиям.

Уравнение (1) не решается в явной форме. Наличие малого параметра при старшей производной приводит к существованию нескольких характерных временных масштабов: быстрого (инерционно-релаксационного) и медленного (диффузионно-дрейфового). С точки зрения численных методов решения уравнение (1) относится к категории «жестких» и требует разработки специальных методов [2]. Для решения сингулярно возмущенной начальной задачи (1) можно также использовать различные асимптотические методы.

В работе выполнено сравнение точности численного решения задачи (1) с асимптотическими приближениями по методу пограничных функций Васильевой-Бутузова [3], который позволяет строить асимптотику решения, равномерно пригодную на  $[0, \infty)$ .

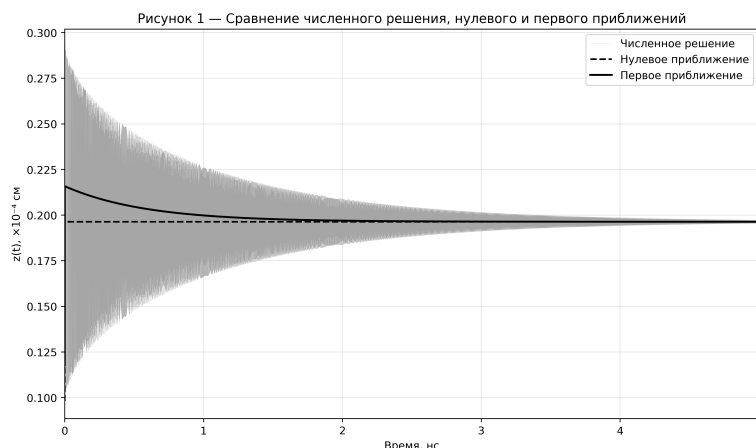
Нулевое приближение решения задачи (1) по методу пограничных функций описывает безинерционное движение к равновесию и определяется решением  $z_{\text{МПФ}}^0(t)$  вырожденной задачи  $bz_s'(t) + s \sin(2kz_s(t)) = 0$ ,  $z_s(0) = z_0$ :  $z_{\text{МПФ}}^0(t) = \frac{1}{k} \arctg[\tg(kz_0)\exp(-2k\frac{s}{b}t)] + \frac{n\pi}{k}$ .

Приближение 1-го порядка по методу пограничных функций имеет вид:

$$z_{\text{МПФ}}^1(t) = \frac{1}{k} \arctg[\tg(kz_0)\exp(-2k\frac{s}{b}t)] - \frac{m}{b} \left[ v_0 + \frac{s}{b} \sin(2kz_0) \right] \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) + \frac{n\pi}{k}.$$

Результаты численного моделирования для задачи (1) с параметрами  $m = 5.5 \cdot 10^{-15}$  г,  $b = 9.5 \cdot 10^{-6}$  г/см,  $k = 1.6 \cdot 10^5$  1/см,  $s = 1 \cdot 10^6$  Н,  $z_0 = \pi/(2 \cdot k) + \varepsilon$  см,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $v_0 = 0.1$  см/с представлены на рисунках 1-2.

Численное решение, полученное явным методом Рунге–Кутты 8-го порядка DOP853 (алгоритм Дормана–Принса из `solve_ivp` Python) (рисунок 1 серым цветом), показывает наличие высокочастотных колебаний, которые быстро затухают вследствие трения. Движение носит релаксационный характер и система стремится к устойчивому положению равновесия  $z(t) = \frac{\pi}{k} \approx 1.96 \cdot 10^{-5}$ , соответствующему минимуму потенциальной энергии. Приближение 1-го порядка по методу пограничных функций (темная сплошная) хорошо описывает огибающую процесса даже для малых времен. Для больших времен приближения 0-го и 1-го порядка слабо отличаются от численного решения.



**Рис. 1.** Сравнение численного решения задачи (1) методом Рунге–Кутты высокого порядка и приближений 0-го и 1-го порядка по методу пограничных функций

Рисунок 2 показывает, что расхождение между численным решением и асимптотическим приближением по методу пограничных функций стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

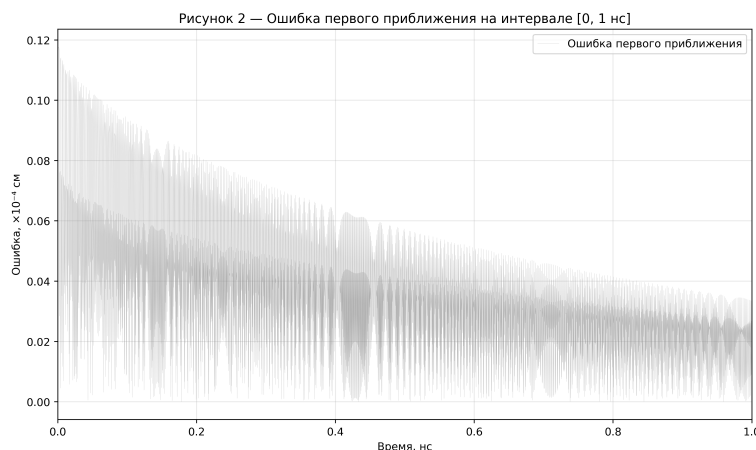


Рис. 2. Ошибка аппроксимации по методу пограничных функций

### Литература

1. Свистун, А. Ч. Локализация диэлектрической сферической наночастицы под действием градиентной силы в интерференционном поле / А. Ч. Свистун, Э. В. Мусафиров, Л. С. Гайда, Е. В. Матук // Журнал прикладной спектроскопии. – 2023. – Т. 90, № 4. – С. 599–605.
2. Ракитский, В. В. Численные методы решения жестких систем / В. В. Ракитский, С. М. Устинов, И. Г. Черноруцкий. – М. : Наука, 1979. – 208 с.
3. Васильева, А. Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Наука, 1973.

## ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДОЛОГИИ i-ГЛАДКОГО АНАЛИЗА

С.В. Щербаков, А.В. Ким

**Введение.** Функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ) являются адекватным математическим аппаратом для моделирования систем с последействием. Однако их численное решение сопряжено с принципиальной трудностью – бесконечномерностью фазового состояния, которое включает предысторию процесса. Классические численные методы, разработанные для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), не могут быть непосредственно перенесены на случай ФДУ без специального теоретического обоснования. В данной работе рассматривается применение методологии i-гладкого анализа [1, 2] для построения и обоснования численных алгоритмов решения ФДУ.

**Основная часть.** Представленный в докладе подход базируется на двух ключевых концепциях методологии i-гладкого анализа.

**Первая концепция** – разделение конечномерных и бесконечномерных составляющих в структуре функционалов и ФДУ [3]. Состояние системы в момент времени  $t$  характеризуется парой: текущее значение  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  (конечномерная компонента) и последействие  $x_t(s) = x(t + s)$ ,  $s \in [-\tau, 0]$  (бесконечномерная – функциональная – компонента). Такое расщепление позволяет интерпретировать ФДУ как эволюцию конечномерной компоненты под воздействием функциональной, что дает возможность адаптировать структуру классических методов ОДУ.

**Вторая концепция** – использование инвариантной производной ( $i$ -производной) [1, 2] в инфинитезимальных конструкциях, что позволяет сохранять при этом конечномерный характер вычислений.

Такая интерпретация состояния ФДУ позволяет описывать и учитывать влияние последствий (функциональной компоненты) на эволюцию конечномерной компоненты, что дает возможность адаптировать для ФДУ структуру классических методов ОДУ.

Во второй части работы рассматривается применение аппарата  $i$ -гладкого анализа для обоснования метода Тейлора приближенного решения ФДУ. Показано, что решение  $x(t + \Delta t)$  допускает разложение в ряд по степеням шага  $\Delta t$ , коэффициенты которого выражаются через инвариантные и коинвариантные производные от правой части уравнения и начального функционала [4]. Коинвариантная производная характеризует изменение решения при вариации начальной функции (предыстории). На основе этого разложения строится численная схема, причем порядок точности схемы определяется числом удержанных членов ряда и гладкостью функционалов, задающих уравнение.

Для алгоритмической реализации метода Тейлора необходимо на каждом шаге интегрирования аппроксимировать предысторию решения конечным набором параметров. В работе обсуждаются различные способы такой аппроксимации, включая интерполяцию Лагранжа для явных методов и интерполяцию Эрмита, которая позволяет учитывать значения производных в узлах и является предпочтительной для методов высокого порядка и уравнений нейтрального типа.

**Заключение.** Методология  $i$ -гладкого анализа предоставляет строгий и эффективный язык для разработки численных методов решения ФДУ. Концепция разделения конечномерных и бесконечномерных составляющих позволяет естественным образом адаптировать классические схемы ОДУ, а аппарат инвариантных и коинвариантных производных дает теоретическую базу для обоснования точности, что демонстрируется на примере метода Тейлора.

### Литература

1. Ким А.В.  $i$ -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
2. Kim A.V.  $i$ -Smooth Analysis. Theory and applications. – Wiley, 2015.
3. Ким А.В., Пименов В.Г.  $i$ -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. – М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
4. Ким А.В., Колмогорцева Н.Г. Моделирование уравнений с последствием на основе разложения в ряд Тейлора по инвариантным и коинвариантным производным // Вестник УГТУ-УПИ. – 2005. – № 17(69). – С. 269–278.

## О ПРИБЛИЖЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКЕ

С.И. Эбель

Работа посвящена решению краевой задачи в ограниченной области с условием Дирихле хотя бы на части границы для приближенно-аналитического решения уравнения изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке [1, 2]. Предполагается, что граница области является замыканием объединения открытых непересекающихся частей. Решение

задачи — искомая функция, правая часть в уравнении — заданная функция, также заданы коэффициенты этого эллиптического уравнения.

Краевая задача рассматривается в вариационной формулировке; пространство её решений — функции из пространства Соболева. Предполагается, что билинейная форма задачи порождает нормировку, эквивалентную нормировке соответствующего пространства Соболева, а правая часть задачи является линейным функционалом. Это предположение обеспечивает существование и единственность решения задачи [2]. Рассматривается разрешимая краевая задача при наименьших индексах и вводится фиктивная краевая задача. Линейный функционал правой части фиктивной задачи полагается нулевым; тогда её решение также будет нулевым, поскольку предполагается, что билинейные формы, входящие в левые части задач, порождают эквивалентные нормировки соответствующих пространств Соболева.

Решаемая и фиктивная задачи формулируются совместно как продолженная задача с пространством решений в виде расширенного пространства. Расширенное пространство содержит продолженное пространство решений исходной задачи. Вводятся операторы проектирования расширенного пространства на продолженное пространство. Предполагается, что в расширенном пространстве сумма рассматриваемых билинейных форм порождает нормировку, эквивалентную нормировке собственного пространства на нём. Полагается, что имеют место положения о продолжении функций с минимальной нормой. Все эти условия обеспечивают существование и единственность решения продолженной задачи.

Для решения продолженной задачи предлагается итерационный процесс [3]. Доказывается теорема о том, что относительные ошибки этого итерационного процесса оцениваются сверху бесконечно убывающей геометрической прогрессией в норме, эквивалентной норме рассматриваемого соболевского пространства.

### Литература

1. Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян. — Ереван : АН АрмССР, 1979. — 235 с.
2. Обэн, Ж. П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж. П. Обэн. — М.: Мир, 1977. — 383 с.
3. Эбель, С. И. Расчет изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке / С. И. Эбель, А. Л. Ушаков // Вестник Югорского государственного университета. — 2025. — Т. 21, № 3. — С. 69–76.

## EQUIVARIANT NEURAL ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR TRAJECTORY PREDICTION

Y. Chen, A.A. Grin

**Abstract.** This paper aims to achieve robust trajectory prediction by embedding geometric symmetry priors into continuous-time dynamics. We separate this task into two sub-tasks: historical encoding and future prediction. In historical encoding, we propose an equivariant recurrent neural network (E-RNN) to encode historical trajectories while preserving equivariance to rotations and translations. In future prediction, we propose an equivariant neural ordinary differential equation (Equivariant Neural ODE) model that generates future velocities by integrating continuous dynamics. The entire framework ensures that predicted trajectories transform identically with input transformations.

**Introduction.** Trajectory prediction is essential for autonomous driving and robotics. Standard RNNs and LSTMs are widely used but lack explicit mechanisms to handle geometric symmetries. An ideal predictor should be *equivariant*: if the input trajectory rotates, the output trajectory should rotate identically. Equivariant deep learning [2, 3] provides a framework for embedding symmetry priors into neural networks, while Neural ODEs [1] enable continuous-time modeling. This work combines both paradigms to propose Equivariant Neural ODEs for trajectory prediction.

Let us denote  $\mathbf{x}_t$  as position, velocity, and acceleration. The task is to predict future velocities  $\{\mathbf{y}_t\}_{t=T+1}^{T+\tau} = F(\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^T)$ . For a transformation  $g$  in group  $G$  (e.g.,  $SO(2)$  or  $E(2)$ ), we have  $g \cdot \mathbf{x}_t = R\mathbf{x}_t + \mathbf{b}$ . A prediction model  $F$  is *equivariant* if:

$$F(g \cdot \{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^T) = g \cdot F(\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^T).$$

We separate the trajectory prediction task into two sub-tasks: historical encoding and future prediction.

**Historical Encoding: E-RNN.** The encoder processes historical trajectories using an equivariant RNN (E-RNN) constructed from equivariant linear layers [2, 3]. The proposed E-RNN update is defined as:

$$\mathbf{h}_t = \Phi_{hh}(\mathbf{h}_{t-1}) + \Phi_{xh}(\mathbf{x}_t),$$

where  $\Phi_{hh}$  and  $\Phi_{xh}$  are equivariant linear maps, which obeys:

$$\Phi(g \cdot \mathbf{x}) = g \cdot \Phi(\mathbf{x}), \quad g \in G.$$

The encoder outputs a context vector  $\mathbf{h}_x \in \mathbb{R}^D$  that encodes the historical information while preserving equivariance.

**Future Prediction: Equivariant Neural ODE.** The decoder defines continuous-time dynamics via an equivariant neural network  $f_\theta$ :

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = f_\theta(\mathbf{y}(t), \mathbf{h}_x, t).$$

Given initial condition  $\mathbf{y}(T) = \mathbf{y}_T$  derived from  $\mathbf{h}_x$ , the ODE solver integrates from  $t = T$  to  $t = T + \tau$ :

$$\mathbf{y}(t) = \text{ODESolver}(f_\theta, \mathbf{y}(T), \mathbf{h}_x, t) \approx \mathbf{y}(T) + \int_T^t f_\theta(\mathbf{y}(s), \mathbf{h}_x, s) ds.$$

The decoder outputs future velocities  $\{\mathbf{y}_t\}_{t=T+1}^{T+\tau}$ .

**Equivariance Guarantee.** The encoder's equivariance ensures  $g \cdot \mathbf{h}_x = \mathbf{h}_{g \cdot x}$ . If the dynamics  $f_\theta$  satisfies:

$$f_\theta(g \cdot \mathbf{y}, g \cdot \mathbf{h}_x) = g \cdot f_\theta(\mathbf{y}, \mathbf{h}_x),$$

then by properties of ODE integration, the predicted velocities satisfy:

$$\mathbf{y}_{g \cdot x}(t) = g \cdot \mathbf{y}_x(t).$$

This guarantees that the entire model is equivariant.

**Training.** The model is trained end-to-end by minimizing the mean squared error:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=T+1}^{T+\tau} \|\mathbf{y}_t - \tilde{\mathbf{y}}_t\|^2,$$

where  $\{\tilde{\mathbf{y}}_t\}_{t=T+1}^{T+\tau}$  is the ground-truth future trajectory.

**Experiments.** We evaluate on pedestrian trajectory datasets. Results are shown in Table 1.

| Model                         | ADE (m) | FDE (m) |
|-------------------------------|---------|---------|
| LSTM                          | 0.64    | 1.12    |
| Neural ODE [1]                | 0.48    | 0.89    |
| Equivariant Neural ODE (ours) | 0.41    | 0.75    |

**Table 1.** Average Displacement Error (ADE) and Final Displacement Error (FDE).

Our method achieves the lowest prediction errors. Under  $90^\circ$  rotation, our model maintains performance while baselines degrade by over 20%, demonstrating the effectiveness of the equivariance property.

**Conclusion.** We introduced Equivariant Neural ODEs for trajectory prediction, combining an E-RNN encoder with a Neural ODE decoder. The framework guarantees equivariance to geometric transformations, improving robustness and data efficiency. Future work includes extensions to 3D trajectories and multi-agent interactions.

This work was supported by the Shenzhen BSQD project under Grant Agreement No. RCBS20231211090749086 and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, project No. F25KI-087.

## References

1. Chen, R. T. Q. Neural Ordinary Differential Equations / R. T. Q. Chen, Y. Rubanova, J. Bettencourt, D. Duvenaud // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2018. – Vol. 31.
2. Cohen, T. S. Equivariant Convolutional Networks / T. S. Cohen, M. Welling // International Conference on Machine Learning. – 2016. – P. 2990–2999.
3. Weiler, M. General E(2)-Equivariant Steerable CNNs / M. Weiler, G. Cesa // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2019. – Vol. 32. – P. 14334–14345.

## IMPACT OF BASIC NETWORK MOTIFS ON THE COLLECTIVE RESPONSE TO PERTURBATIONS

P. Ji

### 1. Motivation and Background

The propagation of signals or perturbations through complex networks is a fundamental process underlying many collective phenomena, such as epidemic spreading, cascading failures, and information diffusion. Previous work by Hens et al.[1] proposed universal scaling regimes for signal propagation based on node degrees, suggesting that propagation patterns are determined by the average number of nodes and their average degree along paths, largely ignoring the role of local motifs like triangles.

However, empirical networks are rich in motifs—recurring subgraphs that serve as building blocks of network structure. Triangles, in particular, are abundant in many real-world networks (e.g., protein-protein interaction networks, social networks). The author argue that these motifs can fundamentally alter propagation dynamics, leading to deviations from previously proposed scaling laws.

### 2. Theoretical Framework

The author consider a general dynamical system on a network:

$$\dot{x}_i(t) = F(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N A_{ij} H_1(x_i(t)) H_2(x_j(t)),$$

where  $x_i$  is the state of node  $i$ ,  $A_{ij}$  is the adjacency matrix, and  $F, H_1, H_2$  are nonlinear functions capturing self-dynamics and interactions. A small permanent perturbation is applied to a source node  $m$ , and the response time  $\tau_{im}$  for node  $i$  is defined as the time when the response ratio  $\delta_i(t) = \Delta x_i(t)/\Delta x_i(\infty)$  reaches a threshold  $\eta$ .

By linearizing around the steady state and decomposing the local neighborhood into independent edges and triangles, the author derive an expression for the response time that explicitly includes contributions from both types of motifs. For large degree  $d_i$ , the response time scales as:

$$\tau_i \sim d_i^{\theta_J} \quad \text{or} \quad \tau_i \sim d_i^{\theta_J - \theta_Q},$$

depending on the sign of  $\theta_Q$ , a new exponent arising from adjacent dynamics. The scaling exponents  $\theta_J$  and  $\theta_Q$  are derived for various dynamical models, including regulatory, population, epidemic, mutualistic, biochemical, human, and inhibitor dynamics.

### 3. Key Results

#### 3.1. Local Propagation

For regulatory dynamics ( $\theta_Q < 0$ ), the response time is dominated by self-dynamics and follows  $\tau_i \sim d_i^{\theta_J}$ . For population dynamics ( $\theta_Q > 0$ ), three regimes emerge: degree-limited, distance-limited, and a composite regime where  $\tau_i \sim d_i^{\theta_J - \theta_Q}$ . This composite regime is not captured by previous theories. The author validate their theoretical predictions with numerical simulations.

Triangles also affect scaling. When triangles dominate, the response time can scale as  $\tau_i \sim d_i^{\theta_J + 1}$  if the dynamics satisfy a certain condition  $f \approx 1$ , otherwise  $\tau_i \sim d_i^{\theta_J}$ . This shows that motifs can alter the scaling exponent by an integer factor

#### 3.2. Global Propagation

For signal propagation along a path of length  $k$ , the total propagation time  $T(m \rightarrow i_k)$  is given by a recursive formula that depends on the degree sequence along the path. The author show that the propagation time can be expressed as a dot product:

$$T(m \rightarrow i_k) \sim \mathbf{g}^T \mathbf{D},$$

where  $\mathbf{g}$  contains layer-dependent weights and  $\mathbf{D}$  depends on the degrees and exponents. This reveals that not only the average degree but also the variance and sequence of degrees along the path affect propagation time. For  $\theta_J > 0$ , the propagation time is dominated by the maximum degree along the path;  $\theta_J < 0$ , by the minimum degree.

#### 3.3. Empirical Network Analysis

Using a protein-protein interaction network, the author show that triangles generally slow down propagation for regulatory dynamics with certain parameters (e.g.,  $a = 0.8, b = 0.5$ ), but can promote propagation for other parameters (e.g.,  $a = 1.2, b = 2.0$ ). This demonstrates the nuanced role of motifs depending on the specific dynamics.

### 4. Significance and Discussion

The study provides a significant advancement in understanding how network structure beyond degree distributions affects dynamical processes. By incorporating motifs—especially triangles—into the analytical framework, the author show that previous scaling regimes (distance-limited and degree-limited propagation) are insufficient. The new framework identifies genuine

scaling exponents that depend on both self-dynamics and interaction dynamics, as well as on local motifs.

The author also highlight that for networks with high average degree (common in social and biological networks), predictions based solely on degree scaling can be orders of magnitude off if motifs are ignored. The introduced exponents  $\theta_J$  and  $\theta_Q$  provide a more robust characterization of universality classes for local response dynamics.

### 5. Limitations and Future Directions

The analysis is based on linear response theory and small permanent perturbations. Large perturbations that push the system far from equilibrium may lead to different steady states not captured by this framework. Extensions to directed networks, multiplex networks, and higher-order interactions are noted as important future directions.

The detailed description of the obtained results is presented in the paper [2].

### References

1. Spatiotemporal signal propagation in complex networks / Ch. Hens [at al.] // Nature Physics. – 2019. – Vol. 15, No. 4. – P. 403–412.
2. Impact of basic network motifs on the collective response to perturbations / B. Xiaoge [at al.] // Nature Communications. – 2022. – Vol. 13, No. 5301.

## DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR THE ANALYSIS OF RESONANT VIBRATIONS OF A STRING OF VARYING LENGTH ON AN ELASTIC FOUNDATION, TAKING INTO ACCOUNT DISSIPATIVE FACTORS

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova

This paper examines the problem of transient processes in distributed systems with variable geometry, characterized by changing boundary conditions over time. The transverse vibrations of a string with a moving boundary are studied as a model example. The complexity of mathematical modeling of such systems stems from the need to account for a number of factors: boundary motion, the presence of an elastic foundation, dissipative forces, and bending stiffness. The goal of this paper is to conduct an analytical study of the transient dynamics of distributed systems with variable structure and to develop an effective method for their analysis, enabling highly accurate prediction of dynamic behavior, including the analysis of resonance properties. To analyze the complex transient dynamics of a string with a moving boundary, the Kantorovich-Galerkin method is used, which allows for consideration of factors such as an elastic foundation, dissipative forces, and bending stiffness. As a result, a second-order numerical-analytical solution is obtained with respect to a small parameter characterizing the slow change in boundary conditions. Based on this solution, explicit analytical expressions were obtained for the key dynamic characteristics of the system, which is important for predicting the behavior of such complex systems.

Of particular practical value are the established quantitative estimates of oscillation amplitudes for two critical modes: steady-state resonance and the process of passing through resonance. Furthermore, the mechanism of oscillation excitation by harmonic action on a moving boundary—the most relevant case for engineering applications—was analyzed in detail. The obtained results are of significant practical significance, as the developed methodological

framework and analytical expressions enable quantitative evaluation of the dynamic behavior of a wide range of engineering structures and technical systems of variable length. This provides a basis for engineering calculations and design of objects such as flexible elements of modern robotics, transport, and lifting systems, where the variable geometry of the structure is a key factor. Analysis of resonant modes is of particular practical importance, as it enables the prediction and prevention of dangerous oscillations.

### References

1. Litvinov V.L., Litvinova K.V. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro-differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2022. – Vol. 62, No. 6. – P. 945–954.
2. Litvinov V.L. Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. – 2020. – Vol. 26, No. 2. – P. 188–199.
3. Litvinov V.L., Shamolin M.V. On One Asymptotic Method for Solving Homogeneous Integro-Differential Equations Describing Oscillations of Objects with Moving Boundaries // Siberian Journal of Industrial Mathematics. – 2025. – Vol. 28, No. 2. – pp. 39–54.

## ON NOVEL DIFFERENTIAL EQUATION GOVERNING VIBRATIONS OF NANOPlates BASED ON THE TWO-PHASE INTEGRAL MODEL OF NONLOCAL ELASTICITY

G.I. Mikhasev, M.G. Botogova

The paper deals with the derivation of a novel differential equation governing long-wave deformations and vibrations of a nanoplate taking into account nonlocal effects in the thickness direction. As the initial equations, the following system of 3D partial differential equations describing deformations of an elastic isotropic body is used:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

In equation (1),  $s_{ij}$  are components of the nonlocal stress tensor,  $x_j (j = 1, 2, 3)$  are coordinates of the body point,  $u_i$  are components of the point displacement, and  $\rho$  is a density. The nonlocal stresses  $s_{ij}$  are coupled to the classical local stresses  $\sigma_{ij}$  through the two-phase integral model of nonlocal elasticity by Eringen [1],

$$s_{ij} = \xi_1 \sigma_{ij} + \frac{\xi_2}{2a} \int_0^h e^{-\frac{|x_3 - x'_3|}{a}} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x'_2, t) dx'_3, \quad (2)$$

capturing the internal length scale effect in the thickness direction, where non-negative  $\xi_1$  and  $\xi_2$  are the volume fractions corresponding to the local and nonlocal phases, respectively, such that  $\xi_1 + \xi_2 = 1$ ,  $a$  is the internal length scale, and  $h$  is the plate thickness. The components of the local stresses are given by the classical constitutive relations coupling stresses and displacements:

$$\sigma_{ij} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta, and  $\lambda, \mu$  are the elastic constants.

The substitution of equations (2), (3) into system (1) results in a system of three integro-differential equations with respect to the displacements  $u_i$ . Assuming  $\sigma_{ij} \in C_D^3$  with  $D = \{(x_1, x_2, x_3) : -l_1 < x_1 < l_1, -l_2 < x_2 < l_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ , twice differentiating this system with respect to  $x_3$  and taking into account the property of the Helmholtz kernel in (2), we obtain the "equivalent" system of partial differential equations. To rule out spurious solutions which may have appeared owing to double differentiation, we introduce a pair of additional boundary conditions on the upper and lower free surfaces (at  $x_3 = 0, h$ ), like it was done in [2].

Introducing a natural small parameter  $\varepsilon = a/h \ll 1$ , and the external characteristic size  $l = \max\{l_1, l_2\}$  of the plate, we reduce the derived partial differential equations to the singularly perturbed differential equations written in dimensionless form. An asymptotic solution of these equations are constructed in the form of superposition of the main (outer) functions related to the main strain-stress state and the edge effect integrals. The edge effect integrals are found in the form exponential functions rapidly decaying far away from the upper and lower surfaces and taking into account the nonlocal effects in the transverse direction. All functions describing the main strain-stress state are sought in the form of asymptotic series, e.g.,

$$\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \varepsilon \sigma_2 + \dots \quad (4)$$

where  $\sigma$  is the normal stress in the bulk. The functions  $\sigma_i$  are found by step-by-step integrating boundary-value problems arising in the leading, first- and second-order approximations [3, 4].

The implementation of proposed asymptotic procedure allowed deriving the series of relations which correctly give the distribution of stresses, strains and displacements in the thickness direction taking into account the nonlocal effects within the framework of Eringen's theory of nonlocal elasticity. The main outcome of the paper is finding the correction for the bending stiffness of the plate

$$D = D_0 \left( 1 + \frac{3(1 - \xi_1)a}{h} \right), \quad (4)$$

where  $D_0$  is the classical bending stiffness, as well as the novel partial differential equation with respect to the normal displacement  $u_3$ , which correctly describes bending long-wave deformation and vibrations accounting for the internal length scale.

It is worth noting that matching relation (4) to similar formula obtained in paper [5] leads to the volume fraction,  $\xi_1 = \frac{\sqrt{\pi}-1}{\sqrt{\pi}}$ , which so far has been the subject of numerous discussions.

Concluding, we note that the elaborated here mathematical model for nanoplates, involving the novel governing equation, generalizes both the model [5] based on using purely non-local model of Eringen and the model [6] taking into account the variation of several non-local integral kernels through the thickness.

This work was supported by the Harbin Institute of Technology, China, within the framework of the Start-up Research Grant.

## References

1. Eringen, A. C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocations and surface waves / A. C. Eringen // *Journal of Applied Physics*. – 1983. – Vol. 9, No. 9. – P.4703–4710.
2. Mikhasev, G. I. On the solution of the purely nonlocal theory of beam elasticity as a limiting case of the two-phase theory / G. I. Mikhasev, A. Nobili // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 190. – P. 47–57.
3. Tovstik, P. E. An elastic plate bending equation of second-order accuracy / P. E. Tovstik, T. P. Tovstik // *Acta Mechanica*. – 2017. – Vol. 228, No. 10. – P. 3403–3419.

4. Mikhasev, G. I. On governing equations for a nanoplate derived from the 3D gradient theory of elasticity /G. I. Mikhasev // *Mathematics and Mechanics of Solids*. – 2022. – Vol. 27, No. 9. – P. 1688–1702.
5. Chebakov, R. A non-local asymptotic theory for thin elastic plates / R. Chebakov, J. Kaplunov, R. A. Rogerson // *Proceedings of the Royal Society, A*. – 2017. – Vol. 473. – DOI: 10.1007/s10665-017-9917-y.
6. Sajadi, B., 2017 Capturing the effect of thickness on sizedependent behavior of plates with non-local theory /B. Sajadi, H. Goosen, F. van Keulen // *International Journal of Solids and Structures*. – 2017. – Vol. 115–116. – P. 140–148.

## NUMERICAL SIMULATION OF TAIMYR BIORESOURCES CYCLES

A.Yu. Perevaryukha

The article is devoted to the problem of non-harmonic population cycles with characteristics that do not persist over time. Oscillation patterns are extremely diverse and are not described by the known cycles of biophysical models. This is relevant for mammal populations on the Arctic Taimyr Peninsula, which experience fluctuations with deep minima. Fluctuations in aggressive populations are more often sawtooth-like series. Reality bears little resemblance to the harmonic cycles of classical models of predator-prey interactions. With the introduction of delay and increased dimensionality, the cyclical behavior of the numerical solution of many popular models gives way to aperiodic behavior, and dynamic chaos arises. Including a third type of competitor in the model will complicate behavior with the potential for chaos, but in reality, dense food webs are more stable. It is shown that the initially correct behavior of models in scenarios suddenly becomes excessively complex when compared with known situations. For none of the studied problems did dynamic chaos help describe the situation in the model, but instead became a problem. The properties associated with chaos are excessive for predictive models of real biosystems, and the conclusions are contradictory. Aperiodic regimes hinder understanding the essence of evolution. The behavior of models based on systems of equations with delays becomes confusing and excessively sensitive to any changes in parameters and initial data. Significant uncertainty in the behavior of the solution cannot correspond to the basic principles of stabilizing evolution and the concept of ecological homeostasis and the collapse of Taimyr bioresources. The article discusses interpretability methods and criteria for essential distinctions for various types of irregular behavior in epidemic and population models. The niche capacity  $K$  in population growth models  $\dot{N} = rf(N^k(t - \tau); K)$  present a theoretical problem. It is not clear how we can calculate the volume of the limiting niche for invaded species with greatly increased  $r$ ? Analyzing population dynamics at low abundance presents both a theoretical challenge and a difficulty for the management of nature. Degradation and even eventual extinction of populations is unfortunately becoming more and more common nowadays. An important question is what population size is needed to guarantee its existence under environmental perturbation? The necessity of having a guaranteed minimum abundance of individuals  $\hat{L} > L$  to maintain the stable existence of a population has been discussed for a long time. If the population is cyclic and there bottom bounded  $\min N_*(t; r\tau)$  as follows from numerous observations, cycles end when the environment's resources are greatly depleted, and this contradicts known models. The hypothesis of a population  $L$  minimum is reflected in the model, where  $L$  turns out to be unstable equilibrium  $\forall N(t) < L, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ :

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) \times (N - L).$$

In the equation  $L$  threshold has effect even when the population is far from it  $N(t) \gg L$ . The author proposes to aggregate the ideas of the two models and the  $\Theta$ -logistic (where  $0 < \Theta < 1$  is justified) in the new, flexibly adjustable modification. Observations show that the success in offspring survival with an increase in  $N(t)$  in large colonies of social insects, far exceeds the negative impact of intraspecific competition. Let's formalize the new model:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \left( \frac{N}{K} \right)^\Theta \right) \sqrt[3]{(N - L)}, \Theta \in [1/2, 3/4].$$

The new model named  $\Theta$ -Bazykin equation is designed for invasive insect species that form large colonies. A small group size becomes dangerous for them, which is also true for activist communities on social networks during information attacks.

An optimal size of a group for reproduction is extremely significant. A decrease in abundance as  $N(t) = K \rightarrow L$  does not always lead to extinction. Several relict species are known that have been in small but stable state for a long time. The scenario formation of local refuge for previously numerous dominant species in the evolution theory is one of the interesting rare variants of population processes. It is quite difficult to estimate the minimum group  $L$  for a specific species without experimental studies. On the other hand, some dangerous and rapid invasions began with single penetrating specimens. An alternative version of the minimum group effect model without explicit use of the  $L$  threshold is:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2.$$

Populations of wide variety of animal species exhibit pronounced fluctuations in abundance, including non-spontaneous ones. Distinct oscillations with a periodic component are observed. Harmonic cycles around equilibrium are rare phenomenon in biological reality. Population fluctuations occur with very different patterns and are caused by various factors. Invasive insects often exhibit repeating series of decaying peaks. Many populations that damage their environment exhibit an abrupt break in the cycle after high peak. Critical declines occur due to trampling of pastures in the Taimyr region. Models are needed to describe abrupt changes in cyclic and depression patterns. Threshold trigger values must be included in equations for oscillatory modes. This article proposes a method for modeling changes in oscillatory patterns based on hybrid overdetermined equations with delay.

### References

1. Perevaryukha, A. Y. An iterative continuous-event model of the population outbreak of a phytophagous hemipteran / A. Y. Perevaryukha // Biophysics. – 2016. – Vol. 61. – P. 334–341.
2. Mikhailov, V.V. Principles of simulation of invasion stages with allowance for solar cycles / V.V. Mikhailov, A.Yu. Perevaryukha, I.V. Trofimova // Technical Physics Letters. – 2023. – Vol. 49, № 9. – P. 97–105.

# МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

## ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА В ЗАДАЧАХ И ПРИЛОЖЕНИЯХ В 2-Х ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 2» С ЭЛЕМЕНТАМИ QR-КОДИРОВАНИЯ

Л.Л. Березкина, А.Н. Деревяго, А.А. Егоров, И.И. Рушнова,  
Н.К. Филиппова, Т.А. Чехменок

Одним из важнейших направлений модернизации методики преподавания высшей математики является поиск новых форм организации самостоятельной работы студентов. С целью мотивации и стимулирования самообразования студентов коллективом сотрудников кафедры высшей математики и математической физики было подготовлено учебное пособие на основе курса лекций и практических занятий, читаемого авторами студентам первого курса физического факультета и факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета, по аналитической геометрии и линейной алгебре. Оно является продолжением учебного пособия «Аналитическая геометрия и линейная алгебра в задачах и приложениях в 2-х частях. Часть 1» [1].

Учебное пособие «Аналитическая геометрия и линейная алгебра в задачах и приложениях в 2-ух частях. Часть 2» соответствует действующим учебным программам [2-6] и направлено на приобретение навыков построения математических моделей физических явлений и проведение необходимых расчётов в рамках построенных моделей, на использование математического языка для выражения количественных и качественных отношений объектов, формируя тем самым упорядоченную систему знаний, необходимую для высококвалифицированных специалистов в области физики, радиофизики и компьютерных технологий.

Данное пособие состоит из пяти глав. Первая глава посвящена фундаментальному понятию алгебры: линейному пространству. Подробно излагаются вопросы линейной зависимости и независимости элементов линейного пространства, а также вопросы, связанные с понятиями базиса и размерности линейного пространства, преобразованиями базисов и координат, что особенно важно при изучении различных разделов физики. Во второй главе приводятся определения, теоремы и примеры, знакомящие читателя с важнейшим инструментом квантовой механики: линейными операторами, а также способом построения матрицы линейного оператора, операциями над линейными операторами. Должное внимание уделяется нахождению собственных и присоединенных векторов линейного оператора. Приведены задачи, в которых применяется теория линейных операторов для вычисления производных и интегралов, решения интегральных уравнений. В третьей главе изучаются билинейные и квадратичные формы. Представлен способ приведения квадратичной формы к каноническому виду и затронут вопрос знакоопределенности квадратичной формы. Четвертая глава посвящена евклидовым и унитарным линейным пространствам. Приводится сравнение понятий и свойств евклидовых и унитарных пространств. Излагается материал, связанный с ортогонализацией системы векторов и выражением скалярного произведения векторов через координаты сомножителей. В пятой главе представлены основные понятия теории линейных операторов в евклидовых и унитарных пространствах.

Предложен материал, связанный с приведением уравнений линий и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Отличительной особенностью пособия является использование QR-кодирования. Разбор ряда задач представлен в формате видео, доступ к которому осуществляется при переходе по ссылкам в виде QR-кодов. Преимуществами такого формата являются наглядность, возможность изложить дополнительную информацию, соответствие современным тенденциям применения информационно-коммуникативных технологий в процессе обучения. Также имеется значительное число разноуровневых задач, снабженных ответами, для самостоятельного решения.

Пособие рекомендовано студентам высших учебных заведений, обучающимся по направлениям и специальностям в области физики, техники и компьютерных технологий и преподавателям дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для подготовки к лекционным и практическим занятиям, а также контрольным мероприятиям и экзаменам.

### Литература

1. Берёзкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра в задачах и приложениях в 2-х частях. Часть 1 / Л. Л. Берёзкина [и др.]. – Минск : РИВШ, 2026.
2. Берёзкина, Л. Л., Егоров, А. А., Филиппова, Н. К. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для специальности: 6-05-0533-15 Интеллектуальная электроника №2800/6. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/332358>
3. Берёзкина, Л. Л., Егоров, А. А., Филиппова, Н. К. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для специальности: 6-05-0533-01 Физика №2919 б. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/334933>
4. Берёзкина, Л. Л., Глецевич, М. А., Филиппова, Н. К. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности: 6-05-0533-04 Компьютерная физика (Профилизации специальности: Компьютерные микро- и нанoeлектроника, Компьютерное моделирование физических процессов, Физическая информатика) №УД-124/б. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304631>
5. Берёзкина, Л. Л., Глецевич, М. А., Филиппова, Н. К. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 6-05-0533-05 Радиофизика и информационные технологии (профилизации специальности: Аэрокосмические технологии, Информатика, программируемые электроника и измерительные системы, Компьютерное проектирование и технологии микроэлектронных систем, Радиофизика и цифровые технологии, Фотоника и прикладные компьютерные технологии) 6-05-0533-12 Кибербезопасность (Профилизация специальности: Безопасность компьютерных технологий и систем) 6-05-0533-11 Прикладная информатика (Профилизации специальности: Интеллектуальные и киберфизические системы, Анализ больших данных и биоинформатика) №УД-174/б. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304696>
6. Берёзкина, Л. Л., Глецевич, М. А., Филиппова, Н. К. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей: 7-07-0533-01 Фундаментальная физика (профилизации специальности: Теоретическая физика и астрофизика, Экспериментальная физика); 7-07-0533-02 Ядерная физика и технологии (профилизации специальности: Физика ядерных реакторов и установок, Ядерная физика и электроника) №УД-129/н. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/304695>

**О СТРУКТУРЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ  
«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ТЕСТАХ» И ЕГО РОЛИ  
В СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Н.С. Березкина, А.А. Гринь, В.С. Немец**

Учебное пособие [1–2] предназначено для студентов математических и физико-технических специальностей, изучающих теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и вариационного исчисления. Это пособие является естественным дополнением изданного ранее учебного пособия [3–4], где излагается теоретический материал, и учебного пособия [5], где приводятся основные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Именно эти книги послужили источником базовых сведений при написании данного учебного пособия. Все эти учебные пособия написаны на основе многолетнего опыта чтения авторами лекций и проведения практических занятий.

Материал книг [1–2] отражает содержание типовых учебных программ курсов «Дифференциальные уравнения», «Дифференциальные и интегральные уравнения» для студентов математических и физико-технических специальностей и включает 21 тест по всем темам названных программ. Каждому блоку задач теста предшествует краткий теоретический материал и решение типовых примеров по рассматриваемой теме. Тестовые задания разбиты по степени сложности на три группы А, В, С. При подборе задач авторы старались следовать принципу органического сочетания фундаментальности и прикладной направленности и показать роль математики в моделировании реальных процессов.

Задания первого уровня сложности А требуют выполнения несложных вычислений, воспроизведения программного материала, применения известных фактов по образцу решения приведенных ранее задач.

Задания второго уровня сложности В позволяют выявить более высокую степень осознанного воспроизведения учебного материала, понимания и осмысленности действий, умения оценивать и анализировать результат.

Решение задач из группы С требует творческого подхода, проявления исследовательских качеств.

Предложенная структура книги способствует развитию такой концепции математики, которая явно выделяет уровень минимальной обязательной подготовки и на этой основе формирует повышенный уровень овладения материалом. Наличие ответов ко всем заданиям позволит использовать пособие как для работы в аудитории, так и для самоподготовки.

Каждый из предложенных в пособии тестов может быть эффективно использован на различных этапах обучения: на лекции в качестве разминочного материала, на практических занятиях коллоквиумах, зачетах и экзаменах — как одна из форм контроля. Пособие будет полезным и при дистанционном образовании.

Авторы надеются, что практика использования предложенных тестов будет способствовать развитию у студентов логического мышления, являющегося составной частью профессионального мышления будущего специалиста, развитию гибкости ума и быстроты реакции восприятия нового материала, развитию математической культуры читателей с разными запросами к объему математических знаний по дифференциальным и интегральным уравнениям. Отработанные с помощью тестов навыки и умения будут являться предпосылкой к формированию как стандарта знаний, так и овладению этими знаниями на более высоком уровне.

### Литература

1. Березкина, Н. С. Дифференциальные и интегральные уравнения в тестах: учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1 / Н. С. Березкина, А. А. Гринь, В. С. Немец. – Минск : РИВШ, 2021. – 308 с.
2. Березкина, Н. С. Дифференциальные и интегральные уравнения в тестах: учебное пособие. В 2 ч. Ч. 2 / Н. С. Березкина, А. А. Гринь, В. С. Немец. – Минск : РИВШ, 2021. – 323 с.
3. Бярозкіна, Н. С. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні: вуч. дапаможнік. У 2 т. Т. 1 / Н. С. Бярозкіна, С. А. Мінюк. – Гродна: ГрДУ, 2000. – 436 с.
4. Бярозкіна, Н. С. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні: вуч. дапаможнік. У 2 т. Т. 2 / Н. С. Бярозкіна, С. А. Мінюк. – Гродна: ГрДУ, 2000. – 403 с.
5. Бярозкіна, Н. С. Дыферэнцыяльныя і інтэгральныя ўраўненні: прыклады і задачы: вуч. дапаможнік / Н. С. Бярозкіна, С. А. Мінюк. – Гродна: ГрДУ, 2002. – 698 с.

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИК ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН ДЛЯ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ

И.Б. Бурачёнок, А.П. Мателенок, В.С. Вакульчик

Фундаментом для изучения специальных дисциплин по специальности «Кибербезопасность» являются базовые математические дисциплины (БМД): «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Дискретная математика и математическая логика», а также «Математический анализ, функциональный анализ и интегральные уравнения». Большинство из БМД читаются студентам на первом курсе. Следует отметить, что от качества полученных знаний при изучении перечисленных математических дисциплин и умения применять эти знания на практике зависит эффект дальнейшего освоения студентами дисциплин по специальности, использующих математику в своей основе. Интеграция БМД с дисциплинами по специальности, внедрение инновационных методов и методик их преподавания, безусловно, повысит качество подготовки специалистов по кибербезопасности, что является **актуальной задачей**.

**Цель работы:** исследовать приоритеты в содержании базовых математических дисциплин и возможность их интеграции с дисциплинами по специальности за счет использования инновационных методов и методик преподавания.

Сегодня для подготовки конкурентноспособного специалиста по кибербезопасности, обладающего обширным образовательным бэкграундом, включающим знания: в IT-технологиях, в том числе, в виртуальной (VR) и дополненной (AR) реальности; инженерии данных; систем мониторинга и аудита информационной безопасности; автоматизированных информационных систем; систем администрирования баз данных и компьютерных сетей; искусственного интеллекта (AI) и машинного обучения (ML), способного оперативно реагировать на вызовы в киберпространстве в условиях эволюции киберугроз, возникает необходимость смены приоритетов в содержании математических дисциплин. Основная цель преподавателя, осуществляющего подготовку по БМД специалиста по кибербезопасности – дать выпускнику надежный инструмент для решения прикладных задач в области информационной безопасности и защиты информации. Однако, чтобы математика стала инструментом для освоения специальных дисциплин по кибербезопасности, преподавателям БМД на своих занятиях необходимо минимизировать абстрактные механические вычисления и перейти к прикладному моделированию.

Для начала, рассмотрим приоритеты в содержании БМД. Например, изучение раздела «Линейная алгебра», где рассматриваются матрицы и векторы, специалисту по кибербезопасности необходимо прежде всего для изучения современных криптосистем. Любое шифрование – это сложное линейное преобразование. Полученные знания позволяют студентам на практике реализовывать алгоритмы матричного шифрования (например, шифр Хилла). Теория чисел и абстрактная алгебра являются основой для понимания, всеми известными алгоритмов RSA и AES, алгоритмов, построенных на эллиптических кривых, которые строятся на операциях с матрицами и векторами в конечных полях. «Линейная алгебра» также используется для решения систем линейных уравнений, описывающих потоки данных и компьютерные сети. Алгебраическая комбинаторика связана с решением задач защиты компьютерных сетей и также может быть применена в форензике (цифровой криминалистике). Без освоения матриц невозможно решить и задачи компьютерного зрения. Современные системы обнаружения вторжений (IDS) используют «Линейную алгебру» для обработки огромных массивов данных. Векторизация трафика компьютерной сети позволяет находить аномалии посредством вычисления «расстояния» между нормальным поведением и потенциальной атакой. Посредством латентно-семантического анализа сегодня выявляют похожие фрагменты вредоносного кода, даже если они были незначительно изменены.

Раздел «Аналитическая геометрия» позволяет студентам выполнять моделирование систем, пространств признаков и открывает новые возможности для анализа атак с точки зрения информационной безопасности в многомерных пространствах. Знания, полученные в результате изучения «Аналитической геометрии», позволяют визуализировать кибератаки, выполняя построение распространения вируса по сети в виде сложных графов и др.

Еще одной из важнейших базовых математических дисциплин является «Дискретная математика и математическая логика», изучающая дискретные последовательности чисел. «Дискретная математика и математическая логика» – это база не только для работы со структурами данных и логическими схемами, но и для цифровой обработки сигналов (DSP). DSP использует описание сигналов как последовательность дискретных значений во времени и пространстве, включая импульсы единичной длины и их сдвиги. Знания теории Фурье, Z-преобразования, вейвлет-преобразования, процессов свертки и фильтрации, применяемых для анализа сигналов, специалисту по кибербезопасности необходимы для выявления технических каналов утечки информации через побочные электромагнитные излучения. Владение математическим аппаратом «Дискретной математики» позволяет обнаруживать данные, спрятанные в аудиофайлах, видеопотоках или изображениях, а также на радиочастотном уровне обнаруживать подмену базовых станций, выявляя атаки (MitM) «человек посередине» и защищать беспроводные сети Wi-Fi, Bluetooth, 5G.

Умение решать дифференциальные уравнения и выполнять интегральное исчисление — это ключевые навыки, получаемые студентами на занятиях по «Математическому анализу, функциональному анализу и интегральным уравнениям». Знания в этой области позволяют специалисту по кибербезопасности моделировать распространение вредоносного программного обеспечения, проводить оценку рисков и определять вероятность кибератак, анализировать сетевой трафик с использованием SIEM-систем, проводить оптимизацию системы защиты от киберугроз и пр.

Какие инновационные методы и методики преподавания перечисленных дисциплин используются преподавателями БМД? Одним из методов можно указать применение программирования для замены рутинных вычислений, т.е. интеграция БМД с процессом алгоритмизации для визуализации и проверки математических моделей. Можно также

предложить методику использования цифровых платформ для адаптивного обучения и построения индивидуальных траекторий освоения материала студентами в удобном для них темпе. Результативной методикой является подготовка и участие в соревнованиях по спортивному программированию, которые требуют математического мышления, глубокого понимания алгоритмов и структур данных, а также высокой скорости написания кода. Из инновационных методик, эффективность которых подтверждена экспериментально, нужно отметить внедрение в учебный процесс элементов CTF (Capture The Flag). Решение задач на специализированных сайтах, участие в онлайн-контестах, соревнованиях по спортивному программированию и в CTF позволяют развивать у студентов критическое мышление и глубокое понимание предметной области. Предлагаемые методы позволяют осуществить переход от механического заучивания формул и максимально сосредоточиться на формировании аналитического мышления специалиста по кибербезопасности, так необходимого в условиях готовности к противодействию киберугрозам, в том числе Zero-day – угроз «нулевого дня», и применение полученных знаний на практике.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.Н. Деревяго, О.А. Кононова

На физическом факультете БГУ дисциплина «Дифференциальные и интегральные уравнения» изучается на первом курсе, а «Уравнения математической физики» – на втором. И к началу второго курса студенты уже обладают методами применения дифференциальных уравнений для решения физических задач.

Рассмотрим типовой пример применения этих методов. Сфера радиуса  $\rho$  содержит растворенное вещество с начальной концентрацией  $C_0 = \text{const}$ . Концентрация на поверхности сферы поддерживается равной  $C_1 > C_0$ . Найти количество абсорбированного вещества в момент времени  $t > 0$ .

Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right) \quad (1)$$

при условиях

$$C(\rho, t) = C_1, \quad C(r, 0) = C_0. \quad (2)$$

Сделав замену  $C(r, t) = v(r, t) + C_1$ , вместо (1), (2) получим задачу с нулевыми граничными условиями:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$v(\rho, t) = 0, \quad v(r, 0) = C_0 - C_1. \quad (4)$$

Решение ищется в виде  $v(r, t) = R(r)T(t)$  [1]. Подставляя замену в уравнение (3) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{(r^2 R')'}{R r^2} = -\lambda^2. \quad (5)$$

Из подстановки замены в граничное условие (4) следует, что на границе выполняется условие  $R(\rho) = 0$ . В точке  $r = 0$  возникает особый случай и нужно требовать, чтобы  $|R(0)| < \infty$ .

Таким образом, задача Штурма–Лиувилля имеет вид

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \lambda^2 R = 0, \quad (6)$$

$$|R(0)| < \infty, \quad R(\rho) = 0. \quad (7)$$

Применим известную из дифференциальных уравнений подстановку для уравнения  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  [2, с. 521]. Чтобы избавиться от члена, содержащего первую производную, нужно сделать подстановку  $y(x) = z(x)e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$ . Для уравнения (6) имеем

$$R(r) = \frac{W(r)}{r}, \quad (8)$$

где  $W(r)$  – новая функция. После подстановки замены (8) в (6) и (7) получаем

$$W'' + \lambda^2 W = 0, \quad (9)$$

$$W(0) = 0, \quad W(\rho) = 0. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (9)

$$W(r) = C_1 \cos \lambda r + C_2 \sin \lambda r.$$

С учетом граничных условий (10) окончательно получим

$$R(r) = \frac{\sin \frac{k\pi r}{\rho}}{r}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для временной функции  $T(t)$  получим дифференциальное уравнение  $T' + a^2 \lambda_k^2 T = 0$ , где  $\lambda_k = \frac{k\pi}{\rho}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , общее решение которого  $T_k(t) = A_k e^{-(\frac{k\pi a}{\rho})^2 t}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Таким образом

$$v(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(\frac{k\pi a}{\rho})^2 t} \frac{\sin \frac{k\pi r}{\rho}}{r}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в начальное условие (4), имеем

$$v(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin \frac{k\pi r}{\rho}}{r} = C_0 - C_1, \quad A_k = \frac{2\rho(-1)^{k-1}}{k\pi} (C_0 - C_1).$$

В итоге концентрация растворенного вещества равна

$$C(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\rho(-1)^{k-1}}{k\pi r} (C_0 - C_1) e^{-(\frac{k\pi a}{\rho})^2 t} \sin \frac{k\pi r}{\rho} + C_1.$$

Количество абсорбированного вещества определяется через тройной интеграл от функции  $C(r, t)$  по объему шара  $V$ , ограниченного сферой радиуса  $\rho$ . Окончательно находим:

$$Q = \iiint_V C(r, t) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\rho C(r, t) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= 4\pi \int_0^\rho C(r, t) r^2 dr = \frac{4\pi\rho^3}{3} \left( C_1 + \frac{6}{\pi^2} (C_0 - C_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-\left(\frac{k\pi a}{\rho}\right)^2 t} \right).$$

### Литература

1. Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – Москва: Физматлит, 2004. – 688 с.
2. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 4-е издание / Н. М. Матвеев. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 768 с.

## ОБ ИЗУЧЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А.Н. Деревяго, Н.К. Филиппова, А.П. Шилин

Линейные уравнения занимают важное место в учебных программах курса дифференциальных уравнений. Студенты физико-математических и ИТ специальностей достаточно подробно изучают теорию линейных уравнений высших порядков. На практических занятиях по уравнениям высших порядков решаются уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера. Студентам, проявляющим интерес к дифференциальным уравнениям, можно предложить для изучения следующее уравнение, связанное одновременно и с уравнениями с постоянными коэффициентами, и с уравнениями Эйлера:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!} x^j y^{(j)} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n & \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!} x^j y^{(j+1)} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 & \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!} x^j y^{(j+2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n & \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!} x^j y^{(j+n)} \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_j$  – попарно различные действительные числа. В дальнейшем  $C_j$ ,  $j = \overline{1, n+m}$ , будут произвольными действительными постоянными. Уравнение (1) сводится вначале к уравнению

$$\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j}{j!} x^j z^{(j)} = 0 \quad (2)$$

для новой неизвестной функций

$$z = z(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & y \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n & y' \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 & y'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n & y^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (2) есть уравнение Эйлера, имеющее общее решение  $z = \sum_{j=1}^m C_j x^j$ , – этот факт указан в [1, с.562] и может быть несложно обоснован. Далее следует находить функцию  $y = y(x)$  из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & y \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n & y' \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 & y'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n & y^{(n)} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^m C_j x^j. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, причём функции  $e^{\lambda_j x}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения. Частному решению  $y_*$  уравнения (3), которое лучше находить методом неопределённых коэффициентов, можно придать вид  $y_* = \sum_{j=1}^m C_j P_j(x)$ , где  $P_j(x)$  – линейно независимые вполне определённые многочлены для каждого конкретного уравнения. Теперь можно записать общее решение исходного уравнения (1)

$$y = \sum_{j=1}^m C_j P_j(x) + \sum_{j=1}^n C_{m+j} e^{\lambda_j x}, \quad (4)$$

из которого хорошо видна его фундаментальная система решений, позволяющая методом вариации произвольных постоянных решать соответствующие неоднородные уравнения.

Укажем пример уравнения (1) для  $n = m = 2$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y - xy' + \frac{1}{2}x^2 y'' \\ 1 & 3 & y' - xy'' + \frac{1}{2}x^2 y''' \\ 1 & 9 & y'' - xy''' + \frac{1}{2}x^2 y^{(4)} \end{vmatrix} = 0.$$

Для соответствующего уравнения (3)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & 3 & y' \\ 1 & 9 & y'' \end{vmatrix} = C_1 x + C_2 x^2$$

получим

$$y_* = C_1 \left( \frac{x}{6} + \frac{2}{9} \right) + C_2 \left( \frac{x^2}{6} + \frac{4}{9}x + \frac{13}{27} \right) = \bar{C}_1 (3x + 4) + \bar{C}_2 (9x^2 + 24x + 26) \\ \left( \bar{C}_1 = \frac{C_1}{18}, \bar{C}_2 = \frac{C_2}{54} \right),$$

и тогда общее решение примера будет иметь вид

$$y_* = \bar{C}_1 (3x + 4) + \bar{C}_2 (9x^2 + 24x + 26) + C_3 e^x + C_4 e^{3x}.$$

Студентам можно предложить провести подробно все рассуждения, связанные с обоснованием формулы (4). Можно предложить составить и решить некоторое количество примеров уравнения (1), а также некоторое количество соответствующих неоднородных уравнений.

### Литература

1. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е издание / Э. Камке. – Санкт-Петербург: Лань, 2003. – 576 с.

## О СТРУКТУРЕ БЛОКА ПРИКЛАДНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В УЧЕБНЫХ ПЛАНАХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ИТ-НАПРАВЛЕНИЯ

А.А. Ефремов

Математическая подготовка является фундаментом, на котором базируется профессионализм любого технического специалиста, и сфера ИТ в этом смысле не является исключением. Рассмотрим проблему формирования математического компонента учебных планов на примере специальности общего высшего образования «Информационные системы и технологии» (ИСиТ).

В государственный компонент входят «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», двухсеместровый курс «Математического анализа», «Дискретная математика», «Теория вероятностей и математическая статистика», а также «Математическое программирование». Компонент учреждения образования разнится в зависимости от специфики той или иной профилизации. Так, будущие геймдизайнеры изучают «Математическое моделирование динамики твердого тела», «Основы игрового баланса» и «Игровую аналитику».

Студенты профилизации «ИСиТ в экономике» в 4-м семестре изучают «Математические модели экономики» (68 часов). В рамках этой дисциплины рассматриваются модели поведения потребителя и фирмы, модели рыночного равновесия, модели отраслевых рынков – совершенной конкуренции, олигополии и монополии, модели пространственной экономики, модели межотраслевого баланса, макроэкономического равновесия, экономического роста, реальных деловых циклов, производственные функции, а также динамические модели, основанные на дифференциальных уравнениях и их системах. В 5-м семестре изучается «Эконометрика» (60 часов), в 6-м – «Алгоритмы и модели машинного обучения» (68 часов). Эти дисциплины рекомендуется ставить одну за другой, причем обязательно после завершения изучения теории вероятностей. В рамках дисциплины «Методы принятия решений в экономике» (6-й семестр, 56 часов) предлагается изучать основы математической теории игр, включая биматричные и кооперативные игры, методы экспертных оценок, элементы инвестиционного анализа, портфельную теорию, многокритериальную оптимизацию и аппарат нечетких множеств). В этом же, либо в смежном, семестре запланировано изучение курса «Исследование операций в экономике» (60 часов), который включает: методы сетевого планирования и управления, оптимизационные задачи на графах (об экстремальных путях, о максимальном потоке и т.д.), марковские

процессы, системы массового обслуживания, модели управления запасами (детерминированные и вероятностные), а также элементы теории расписаний (опционально). Завершает обучение математический блок «Аналитическое обеспечение экономических систем» (7-й семестр, 44 часа). Здесь предполагается ознакомить обучающихся с основами построения и анализа имитационных моделей и развить навыки работы с пакетом AnyLogic.

В заключение отметим, что в процессе разработки учебных планов IT-специальностей в отношении блока прикладных математических дисциплин следует основываться на следующих основных принципах: во-первых, последовательность изучения математического аппарата (так, например, переход к теории игр не может быть осуществлен без предварительного ознакомления с методами оптимизации и теорией вероятностей); во-вторых, соответствие сложности изучаемого материала уровню студенческой аудитории (дисциплина, связанная с машинным обучением предполагает наличие у студентов комплексных знаний различных разделов математики, а также языка Python и представляется относительно сложной, соответственно ее не рекомендуется изучать ранее 3-го курса); в-третьих, отсутствие дублирования тем (это приводит к нерациональному расходованию аудиторных часов, нарушению целостности восприятия материала); в-четвертых, грамотное сочетание различных форм проведения учебных занятий (есть темы, изучение которых обязательно сопровождать разбором задач на доске, например, графический метод в линейном программировании; в то же время некоторые темы требуют обязательного использования компьютера вследствие трудоемких вычислений, например, решение матричной игры  $mxn$ ) [1]; в-пятых, баланс аудиторной и самостоятельной работы студента (количество тем должно коррелировать с отведенными на их изучение часами; так, не рекомендуется допускать наличие тем, по которым не выделяются часы на практические либо лабораторные занятия; либо же учащиеся должны быть обеспечены четкими методическими указаниями для самостоятельного выполнения заданий с последующим обязательным их контролем).

На наш взгляд, предложенная выше структура позволит обеспечить качественную подготовку будущих инженеров-программистов и сформировать у них необходимый набор аналитических компетенций.

### Литература

1. Орлова, И. В. Использование компьютерных технологий при преподавании экономико-математического моделирования / И. В. Орлова, Н. В. Концевая // Современная математика и концепции инновационного математического образования. – 2014. – Т. 1, № 1. – С. 194-199.

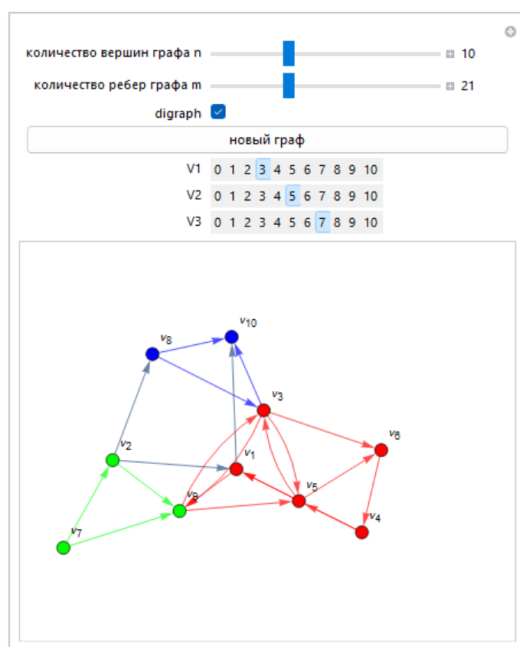
## ИНТЕРАКТИВНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОКРЕСТНОСТЕЙ ВЕРШИН В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ ГРАФОВ

А.И. Жук, Е.Н. Защук, Л.А. Ярмолик, В.А. Шеина

Современное обучение теории графов требует активного применения интерактивных средств визуализации. Студенты значительно лучше усваивают материал, когда могут наблюдать динамическое поведение графов, экспериментировать с параметрами и самостоятельно исследовать структуры. Однако большинство существующих программных инструментов либо избыточно сложны, либо не ориентированы на учебные задачи. Поэтому разработка компактных, интуитивно понятных модулей, позволяющих визуализировать ключевые понятия теории графов, остаются актуальной задачей.

Созданный авторами модуль поиска окрестностей вершин графа реализован в среде Wolfram Mathematica, что обеспечивает высокую скорость вычислений, гибкость интерфейса и широкие возможности визуализации. Основная функция модуля – автоматическое построение графа с заданными параметрами и интерактивное выделение окрестностей трех выбранных вершин различными цветами. Следует отметить, что благодаря простоте и прозрачности программного кода модуль легко адаптируется под любые задачи учебного процесса. Преподаватель может без труда изменить правила генерации графов, расширить набор визуальных эффектов, добавить новые элементы интерфейса или встроить модуль в более крупные учебные комплексы. Такая гибкость делает инструмент не только полезным в текущем виде, но и перспективным для дальнейшего развития в соответствии с потребностями конкретной дисциплины или курса.

Интерфейс модуля предельно прост и интуитивен: все элементы управления расположены компактно, выбор параметров осуществляется в один-два клика, а визуализация обновляется мгновенно (см. рис. 1). Это делает модуль удобным как для преподавателя, так и для студентов, впервые знакомящихся с теорией графов.



**Рис. 1.** Пользовательское окно модуля для поиска окрестностей выбранных вершин

Применение данного модуля в учебном процессе позволяет существенно повысить уровень знаний и интерес к изучаемому предмету. Он может использоваться: при объяснении понятий окрестности вершины, степени вершины, смежности, для демонстрации различий между ориентированными и неориентированными графами, при изучении свойств и структуры случайных графов. Таким образом, модуль может эффективно использоваться на всех этапах изучения теории графов. На лекционных занятиях он служит удобным инструментом для демонстрации ключевых понятий: преподаватель в реальном времени показывает, как изменяется структура графа при варьировании числа ребер, чем отличаются ориентированные и неориентированные графы, как выглядят окрестности выбранных вершин. Такая визуальная поддержка делает объяснение материала более доступным и помогает студентам лучше воспринимать абстрактные понятия. На практических занятиях модуль используется для закрепления теоретических знаний. Студенты получают задания

по анализу случайно сгенерированных графов и выполняют его с помощью модуля: сравнивают окрестности различных вершин, определяют вершины с максимальной степенью, исследуют особенности структуры графа. Возможность интерактивно выбирать вершины и сразу видеть результат значительно ускоряет процесс и делает его более увлекательным. В рамках лабораторных работ модуль становится инструментом самостоятельного исследования. Инерактивность способствует развитию исследовательских навыков: студенты самостоятельно формулируют гипотезы, проверяют их, анализируют результаты. Такой подход делает изучение теории графов более осмысленным и мотивирующим.

Авторами также были разработаны и внедрены в учебный процесс другие интерактивные модули для изучения теории графов. Например, модуль поиска кратчайшего пути, модуль построения графа по матрице смежности, модуль для анализа графа, модуль поиска минимального и максимального остовного дерева и др [1, 2].

Опрос студентов до и после внедрения модулей показал, что использование подобных инструментов значительно повышает их вовлеченность и облегчает восприятие теоретического материала.

Разработанный модуль демонстрирует эффективность применения интерактивных визуальных средств в преподавании теории графов. Простота интерфейса, гибкость настроек и наглядность результатов делают его удобным инструментом как для лекционных демонстраций, так и для самостоятельной работы студентов. Опыт внедрения подтверждает, что подобные программные решения способствуют более глубокому усвоению материала и развитию исследовательского мышления.

### Литература

1. Жук, А. И. Моделирование задач теории графов с использованием систем компьютерной алгебры / А. И. Жук, Е. Н. Зацук, Л. А. Ярмолик, В. А. Шеина // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2025. – № 2(137). – С. 171–177.
2. Жук, А. И. Внедрение инновационных подходов при изучении дисциплины «Теория графов» с использованием систем компьютерной алгебры / А. И. Жук, Е. Н. Зацук, Л. А. Ярмолик, В. А. Шеина // Вестник Брестского университета. Сер. 3. – 2025. – № 2. – С. 66–73.

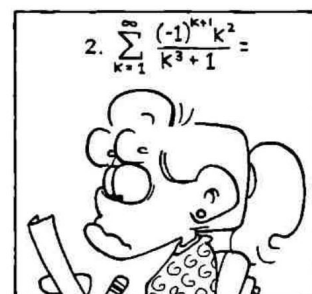
## СЕРЬЕЗНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕСЕРЬЕЗНОЙ ЗАДАЧИ

В.И. Зеленков

Эта публикация, наверное, может показаться неожиданной на фоне других тезисов авторитетной конференции. Математика – серьезная наука, но ее преподавание можно дополнить отступлениями, которые, давая студентам передохнуть, вместе с тем иллюстрируют один из разделов учебной программы. Вот пример, который автор обычно приводит на заключительной лекции по теории функций комплексной переменной.

В классической книге [1] есть неожиданная по форме задача (рис. 1). История ее такова: художник Билл Эйменд (Bill Amend), автор комиксов о занятой семье Фокстрот, в одном из выпусков рассказал о том, как четырнадцатилетней девочке снится страшный сон — будто бы она сдает

56. Show that



$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log 2 + \frac{\pi}{3} \operatorname{sech}(\pi\sqrt{3}/2).$$

Рис. 1.

экзамен по математике. Одно из заданий для «экзамена» Эйменд нашел в задачнике по математическому анализу (упражнение 20 на с. 646 книги [2]), но изменил условие: вместо несложного доказательства сходимости ряда Лейбница ученице предлагалось найти сумму этого ряда. Задача стала непосильной для не любящей математику школьницы, но она вполне вписывается в раздел учебной программы курса ТФКП «Суммирование рядов при помощи вычетов».

Найдем ее решение. Обозначив сумму через  $S$ , разобьем ряд на два слагаемых:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^2}{k^3 + 1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k-1)}{k^2 - k + 1} = \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2. \quad (1)$$

Очевидно, что

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = 1 - \ln 2.$$

Преобразуем ряд  $S_2$ :

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k-1)}{k^2 - k + 1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k, \quad (2)$$

где  $a_k = \frac{(2k-1)}{k^2 - k + 1}$ . При этом  $a_{-k} = \frac{-(2k+1)}{k^2 + k + 1} = -a_{k+1}$  и, таким образом,

$$S_2 = - \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{-k+1} a_{k+1} = - \sum_{k=-\infty}^0 (-1)^k a_k. \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем:

$$S_2 = -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k a_k = -\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)}{k^2 - k + 1}.$$

Пусть  $f(z) = \frac{2z-1}{z^2 - z + 1}$ . Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 26.2 из книги [3], тогда к ней можно применить формулу нахождения суммы ряда с использованием вычетов

$$S_2 = -\frac{1}{2}(-\pi) \sum_{m=1}^2 \operatorname{res} \left[ \frac{f(z)}{\sin \pi z}, z = z_m \right],$$

где  $z_m = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$  — полюсы первого порядка функции  $f(z)$ . Каждый вычет равен  $1/\sin \pi z_m$  и, таким образом,

$$S_2 = \frac{1}{2} \pi \left( \frac{1}{\sin \pi \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} + \frac{1}{\sin \pi \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi \sqrt{3}}{2}}.$$

Окончательно имеем

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^2}{k^3 + 1} = \frac{1}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 = \frac{1}{3} (1 - \ln 2) + \frac{1}{3} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi \sqrt{3}}{2}},$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** В [1] предполагается другой способ суммирования — с использованием дигамма-функции — но это выходит за рамки программы курса ТФКП.

**Замечание 2.** Билл Эйменд по образованию физик, так что усложнение задачи, возможно, было сделано им вполне сознательно.

### Литература

1. Andrews, G. E. Special Functions / G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 664 p.
2. Anton, H. Calculus. Early Transcendentals / H. Anton, I. Bivens, S. Davis. – John Wiley & Sons, Inc., 2012. – 1316 p.
3. Григорьев, Е. А. Введение в комплексный анализ (2-е изд.) / Е. А. Григорьев. – М.: МАКС Пресс, 2019. – 302 с.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ В КУРСЕ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

**И.С. Козловская, Е.С. Чеб, В.В. Дайняк, А.Г. Каркоцкий**

В настоящее время математическое моделирование является основой информатизации общества и всех сфер деятельности человека, понятие математической модели достаточно хорошо освоено и моделирование составляет основу любой современной науки.

В дисциплине «Математическое моделирование», изучаемой студентами факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета по специальности «Информатика» излагаются основы математического моделирования реальности, основные принципы и методы построения моделей, их структура и свойства. Стержень курса составляют дифференциальные модели, базирующиеся на использовании дифференциальных, интегральных и конечно-разностных уравнений и задач для них. При этом дисциплина направляет студентов на обязательное использование в исследованиях вычислительного эксперимента и компьютерного моделирования.

Применение компьютерной математики существенно расширяет возможности автоматизации всех этапов математического моделирования, так как представляет совокупность теоретических, алгоритмических, аппаратных и программных средств, предназначенных для эффективного решения на компьютерной технике всех видов математических задач.

Системы компьютерной математики позволяют провести исследование проблемы, анализ данных, моделирование, тестирование, проверку существования решения, оптимизацию, документирование и оформление результатов, они позволяют сосредоточить основное внимание на существе проблемы, оставляя в стороне технику классической математики.

Лабораторные занятия проводятся с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, которая имеет широкие графические возможности и позволяет эффективно проиллюстрировать решение поставленных задач.

Такое расширение роли инструментария математики и информатики в содержании математического образования может стать эффективным способом воплощения деятельностного подхода к обучению, расширения понимания роли математики как средства решения реальных практических задач.

Приведем одну из задач, демонстрирующую применение системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica в рамках лабораторных занятий по курсу «Математическое моделирование» [1].

**Задача.** Тонкая струна длины  $l = 2$  подвешена в воздухе за левый конец  $x = 0$ , а правый конец прикрепленный к пружине, жёсткости  $h = 1$ , испытывает сопротивление, пропорциональное отклонению. Профиль начального отклонения описывается уравнением  $x^2 - x$ , начальная скорость отсутствует. На струну воздействуют внешние силы  $f(x, t) = \frac{x}{1-lh}$ . Описать положение точек струны в произвольный момент времени  $t > 0$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= \frac{x}{1-lh}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 2, \\ u|_{t=0} &= x^2 - x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=2} - hu|_{x=2} = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Перейдем к построению решения данной начально-краевой задачи в системе Wolfram Mathematica.

Зададим параметры и неоднородность в уравнении.

$l = 2; h = 1; f[x_, t_] := \frac{x}{1-lh}.$

Зададим уравнение, начальные и граничные условия.

$\text{equ} = D[u[x, t], \{t, 2\}] == D[u[x, t], \{x, 2\}] + f[x, t]; \text{ic} = \{u[x, 0] == x^2 - x;$   
 $\text{Derivative}[0, 1][u][x, 0] == 0\}; \text{bc} = \{u[0, t] == 0; \text{Derivative}[1, 0][u][l, t] - hu[l, t] == \frac{t^2}{2}\}.$

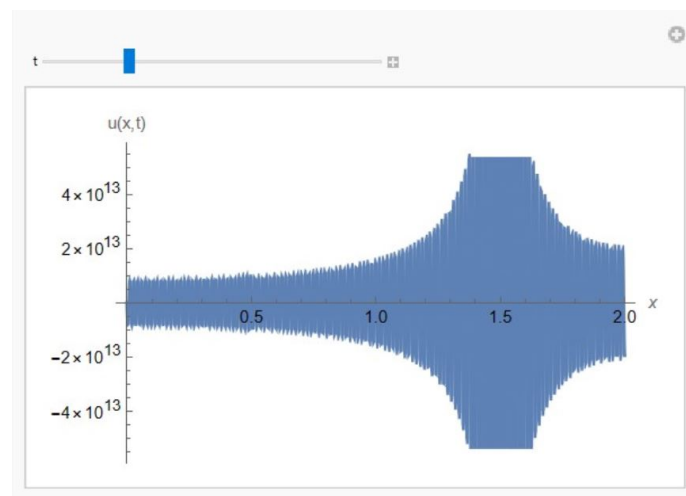
Для решения поставленной задачи применим следующую функцию.

$\text{solution} = \text{FullSimplify}[u[x, t] /. \text{DSolve}[\{\text{equ}, \text{ic}, \text{bc}\}, u, \{x, t\}], \text{Element}[K[1], \text{Integers}]] /$   
 $\{K[1] \rightarrow k, K[2, K[1]] \rightarrow \lambda_k^2\}.$

Для визуализации полученного решения необходимо решить задачу Штурма–Лиувилля, т. е. определить собственные значения  $\lambda_k$  и соответствующие им собственные функции. Для определения  $\lambda_k$  находятся корни трансцендентного уравнения. Для его решения воспользуемся следующими функциями.

$\text{root}[n_] := \text{NSolve}[\text{NSolve}[\text{Tan}[2\lambda] == \lambda \& 100 * n < \lambda \leq 100(n + 1), \text{Reals}]];$

$\text{lambdaVal} = \text{Flatten}[\text{Table}[\lambda /. \text{root}[i], \{i, 0, 3\}]].$



**Рис. 1.** Профиль струны в конкретный момент времени  $t = t_0$

Выпишем решение с учётом найденных собственных значений  $\lambda_k$  и собственных функций  $\sin(\lambda_k x)$  в системе Wolfram Mathematica.

$$u[x_-, t_-] := -\frac{t^2 x}{2} + \sum_{k=1}^{\text{lambdaVal} // \text{Length}} \frac{-2\text{lambdaVal}[[k]]^2 + (3\text{lambdaVal}[[k]] + 2(1 - \frac{1}{\text{Cos}[2\text{lambdaVal}[[k]]]]))}{\frac{1}{2\text{lambdaVal}[[k]]^3} \left( 2 - \frac{1}{(1 + \text{lambdaVal}[[k]]^2)} \right)} \text{Cos}[\text{lambdaVal}[[k]]t] \cdot \text{Sin}[\text{lambdaVal}[[k]]x].$$

Построим график решения  $u(x, t)$  в конкретный момент времени  $t = t_0 \in [0, 10]$  с помощью функции

`Manipulate[Plot[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 2}, AxesLabel->{x, "u(x, t)"}, {t, 0, 10, 0.5}]`

Можно отследить положение точек струны в любой момент времени, меняя значение  $t$  в промежутке от 0 до 10. На рис.1 представлен профиль струны в момент  $t = t_0$ .

### Литература

1. Дайняк, В. В. Практикум по дифференциальным уравнениям в частных производных: методические указания и задания для самостоятельных и лабораторных работ. В шести частях. Часть 3 / И.С. Козловская, Е.С. Чеб, В.В. Дайняк, А.Г. Каркоцкий. – Минск: БГУ, 2026. – 68 с.

## УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ»

**А.А. Леваков, М.М. Васьковский**

В 2024 году опубликована первая часть учебного пособия по математическому анализу под названием «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной» (авторы Леваков А.А., Васьковский М.М., Новичкова Д.А.), которая посвящена изложению тех разделов математического анализа, которые студенты факультета прикладной математики и информатики традиционно изучают в первом семестре первого курса, а именно: действительные числа, предел, функции, непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной [1]. В 2025 году опубликована вторая часть пособия под названием «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление векторных функций» (авторы Леваков А.А., Васьковский М.М.), в которую включены те разделы математического анализа, которые изучаются студентами факультета прикладной математики и информатики во втором семестре первого курса, а именно: дифференциальное и интегральное исчисление функций двух переменных, векторные функции, дифференциальное и интегральное исчисление векторных функций, экстремумы функций векторного аргумента, числовые ряды [2]. В данном учебном пособии приведены полные доказательства всех приведенных теорем, включая теоремы о сведении криволинейных интегралов к интегралу Римана, формулу Грина, теорему о независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования, необходимое и достаточное условия Дарбу интегрируемости скалярных функций векторного аргумента, теорему о сведении кратного интеграла к повторному, необходимое и достаточное условия локального условного экстремума. В учебном пособии, кроме традиционных методов исследования числовых рядов, приведены критерий Куммера и признак Гаусса. Авторы стремились соединить доступность, строгость и полноту изложения материала с краткостью, свойственной лекциям. Упомянутые учебные пособия явились продолжением цикла учебных пособий по математическому анализу, подготовленных на кафедре фундаментальной математики и интеллектуальных систем Белорусского государственного университета [3–5].

### Литература

1. Леваков, А. А. Математический анализ: учеб. пособие: в 3 ч. Дифференциальное и интегральное исчисление векторных функций / А. А. Леваков, М. М. Васьковский, Д. А. Новичкова. – Минск: БГУ, 2024. – Ч. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – 199 с.
2. Леваков, А. А. Математический анализ: учеб. пособие: в 3 ч. / А. А. Леваков, М. М. Васьковский. – Минск: БГУ, 2025. – Ч. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление векторных функций. – 191 с.
3. Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу: Часть 1 / Ю. С. Богданов. – Минск : БГУ, 1974. – 175 с.
4. Богданов, Ю. С. Лекции по математическому анализу: Часть 2 / Ю. С. Богданов. – Минск : БГУ, 1978. – 182 с.
5. Кастрица, О. А. Математический анализ. Краткий курс: учеб. пособие / О. А. Кастрица, С. А. Мазаник. – Минск : БГУ, 2017. – 299 с.

## СОЗДАНИЕ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДЛЯ СТАРШЕЙ ШКОЛЫ

Н.И. Лобанова, В.Д. Селютин

Целью нашего исследования, результаты которого были опубликованы ранее, являлось формирование у школьников целостной картины мира посредством изучения дифференциальных уравнений [1, 2, 3]. В рамках этого исследования была разработана методика, ориентированная на старшеклассников, которая фокусируется на практическом применении дифференциальных уравнений для решения жизненно важных задач. Эта методика направлена на целенаправленное формирование практического опыта учащихся, развитие их мировоззрения и осознание собственной активной роли в познании окружающего мира [1, 2, 3].

Следующий этап исследования нацелен на выявление педагогических условий овладения учителями методикой обучения школьников дифференциальным уравнениям.

Ключевые компетенции будущего учителя дифференциальных уравнений:

Для эффективного преподавания дифференциальных уравнений будущий учитель должен обладать следующими компетенциями: Глубокое теоретическое знание: Понимание основ дифференциальных уравнений, различных типов уравнений, методов их решения (аналитических и численных), а также их геометрической и физической интерпретации.

Педагогическое знание предмета: Это знание того, как лучше всего объяснить конкретные концепции дифференциальных уравнений, какие аналогии и примеры будут наиболее понятны учащимся, какие типичные ошибки они совершают и как их предотвратить.

Навыки моделирования и применения: Умение демонстрировать, как дифференциальные уравнения используются для описания реальных явлений (рост популяций, радиоактивный распад, колебания, электрические цепи и т.д.). Дифференциация обучения: Способность адаптировать материал и методы преподавания к разному уровню подготовки и интересам учащихся.

Использование технологий: Умение применять математические пакеты для визуализации, численного решения и исследования дифференциальных уравнений.

Развитие критического мышления и исследовательских навыков: Способность ставить задачи, формулировать гипотезы, анализировать результаты и делать выводы.

Разработка диагностических инструментов.

При создании оценочных инструментов ключевым аспектом является проверка умения педагога эффективно планировать, организовывать, контролировать и координировать процесс преподавания дифференциальных уравнений школьникам. Это включает, в частности, способность формировать у учащихся устойчивую учебно-познавательную мотивацию к освоению данной темы, а также эффективно управлять коллективом как на уроках, так и во внеурочное время. В соответствии с этими критериями были разработаны диагностические задания, направленные на оценку следующих компетенций: владение педагогической деятельностью, основанной на глубоких научных знаниях; умение организовывать учебный процесс с применением актуальных образовательных технологий, включая дистанционные; а также способность планировать, организовывать, контролировать и координировать образовательный процесс, исходя из результатов изучения дифференциальных уравнений и методики их преподавания школьникам [1–4].

Перечислим типы заданий:

I. Задания открытого типа с кратким ответом: (вставить термин, словосочетание... , дополнить предложенное).

II. Задания закрытого типа на установление последовательности.

III. Задания закрытого типа на установление соответствия.

IV. Задания открытого типа с развёрнутым ответом (задача).

В качестве ближайшей перспективы дальнейших исследований в данном направлении предстаёт выявление специфики оценочных средств для диагностики готовности будущих учителей математики к формированию у старшеклассников целостной картины мира средствами аппарата дифференциальных уравнений [1].

### Литература

1. Селютин В. Д., Авдеева Т. К., Лобанова Н. И., Яремко Н. Н. Разработка оценочных заданий для диагностики готовности будущих учителей // Ученые записки Орловского государственного университета. – 2025. – № 4 (109). – С. 355–360.
2. Лобанова Н.И. Изучение старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования как средство формирования целостной картины мира : автореф. дис. канд. пед. наук. – Орёл, 2024. – 24 с.
3. Лобанова, Н. И. Практико-ориентированный подход к обучению дифференциальным уравнениям как методологическая основа формирования целостной картины мира / Н. И. Лобанова, В. Д. Селютин, Н. Н. Яремко // Мир науки. Педагогика и психология. – 2025. – Т. 13, № 5. – URL: <https://mir-nauki.com/PDF/96PDMN525.pdf> (дата обращения: 22.03.2026).
4. Селютин В.Д. Философские основания методической подготовки будущего учителя математики к обучению школьников в стохастике // Личностное и профессиональное развитие будущего специалиста: материалы XI Международной научно-практической конференции 25 мая – 1 июня 2015 г. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2015. – С. 178–181.

## ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ КАК ИНСТРУМЕНТ АНАЛИЗА ДАННЫХ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

Н.П. Макарова, А.Ф. Проневич

В 2025 году для обучающихся второй ступени высшего образования (специальность 7-06-0113-04 «Физико-математическое образование») разработан учебный курс «Искусствен-

ный интеллект в образовании и науке»[1]. Основной целью данного курса является формирование у магистрантов компетенций в области использования искусственного интеллекта в образовании и науке, совершенствование умений применять на практике новейшие достижения науки и передового педагогического опыта. Задачи учебной дисциплины: обеспечить глубокое изучение дидактических возможностей и использование инструментов искусственного интеллекта при решении практических задач, возникающих в различных областях образования и науки; проанализировать преимущества и риски использования искусственного интеллекта в образовании и науке; продемонстрировать возможность оценки качества получаемых результатов.

Требования к компетентности (согласно образовательному стандарту специальности): СК-2 – применять технологии искусственного интеллекта для создания эффективной и интерактивной обучающей среды с целью индивидуализации обучения и автоматизации административных процессов в образовании, обработки научной информации и анализа данных.

В результате изучения учебной дисциплины магистрант должен знать: типы задач искусственного интеллекта, их особенности и свойства; инструменты искусственного интеллекта для различных задач образования и науки; риски использования искусственного интеллекта; уметь: применять технологии искусственного интеллекта для решения различных задач образования и науки; владеть: навыками промптинга и инструментами искусственного интеллекта для решения задач образования и науки с минимизацией возможных рисков.

Важное место в содержании дисциплины отводится вопросам применения искусственного интеллекта в анализе образовательных данных (Educational Data Mining & Learning Analytics), использования для аналитики в образовании, предметной области.

Одна из лабораторных работ посвящена анализу данных в контексте оптимизации численных методов решения дифференциальных уравнений. Обучающимся предлагается сосредоточиться на одном из следующих вариантов: подборе оптимальных параметров численного метода; предсказании времени решения; обнаружении ошибки метода в зависимости от характеристик уравнения и параметров метода. Основная идея решения задачи основана на использовании данных, полученных в результате численных экспериментов с разными уравнениями и параметрами.

Вариант датасета: «Сравнение численных методов для ОДУ». Магистратам предложено рассмотреть несколько методов (например, Эйлера, Рунге-Кутты 4 порядка, Адамса) и для каждого метода варьировать: шаг интегрирования  $h$ ; параметры уравнения (например, в уравнении  $y'' = ky$  варьировать  $k$ ); начальные условия; отрезок интегрирования  $[t_0, T]$ . Выходные переменные (целевые): ошибка решения (например, максимальная ошибка на сетке или норма ошибки в конечной точке); время вычисления. Таким образом, студенты проводят исследования двух задач:

1. Регрессия: предсказание ошибки метода и времени вычисления по параметрам уравнения и метода.

2. Кластеризация: выбор лучшего метода для заданных параметров (критерии кластеризации: минимальная ошибка, минимальное время вычислений).

В ходе выполнения лабораторной работы магистранты после знакомства с данными и постановкой задачи выполняют разведочный анализ данных, сравнительный анализ и построение моделей, анализ результатов и их интерпретацию. Использованные инструменты: скрипты на Python (Pandas). Использование методов и инструментов искусственного интеллекта и машинного обучения в данном контексте, как отметили в рефлексии ма-

гистранты, позволяет значительно ускорить вычисления, повысить точность решений и автоматизировать подбор параметров. Комбинация регрессии и кластеризации позволяет создать интеллектуальную систему, которая фокусируется на выполнении алгоритмов, а также определяет лучший алгоритм в текущей ситуации.

### Литература

1. Макарова, Н.П. Искусственный интеллект в образовании и науке: Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальностей 7-06-0113-04 Физико-математическое образование / Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы». – Утв. 29.05.25. – 2025. URL: <https://elib.grsu.by/doc/125745>. – 11 с.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАНИЦ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И.В. Марченко

К фундаментальным понятиям математического анализа относятся понятия границ числовых множеств. В школьном курсе математики формируется лишь интуитивное представление о них, поэтому у студентов первого курса возникают трудности при нахождении точных границ числовых множеств. В докладе приводится систематизация методических приемов, способствующих усвоению данных понятий.

В случае конкретных числовых множеств доказательство того, что некоторое число является его точной верхней (нижней) границей основывается на следующих определениях.

**Определение 1.** Число  $M$  называется точной верхней границей множества  $X$ , если выполнены два условия:

- 1)  $(\forall x \in X) [x \leq M]$ ;
- 2)  $(\forall M' < M) (\exists x' \in X) [x' > M']$ .

**Определение 2.** Число  $m$  называется точной нижней границей множества  $X$ , если выполнены два условия:

- 1)  $(\forall x \in X) [x \geq m]$ ;
- 2)  $(\forall m' > m) (\exists x' \in X) [x' < m']$  [1].

В отдельных случаях вызывает сложности и процесс поиска границ. Не имея опыта решения таких задач в школе, студентам не понятны сами подходы к построению оценок для элементов множеств, переходы между неравенствами и т.п. Впоследствии практически все студенты находят числа  $M$  и  $m$  и справляются с проверкой первого условия определений, тем самым устанавливая, что найденные числа есть верхняя и нижняя граница соответственно. Проверка второго условия определений вызывает затруднения. Наиболее частый ответ, что оно очевидно выполняется.

Предлагается разбить задачу нахождения точных границ на следующие этапы.

**1. Эвристический анализ.** На этом этапе используется визуализация элементов множества либо в виде их записи в явном виде (если они заданы формулой), либо с помощью числовой прямой. В результате можно обнаружить  $\sup X$  и  $\inf X$  путем определения предельных значений параметров.

**2. Формализация условий.** Происходит переход к системе неравенств. Важно обратить внимание на кванторы и их последовательность в определениях 1 и 2.

**3. Конструктивный метод доказательства.** Разработка типовых алгоритмов для разных видов множеств (заданных формулой общего члена последовательности, неравенствами или объединением интервалов).

Предложенный методический подход позволяет снизить количество типовых ошибок. Систематизация приемов построения точных границ числовых множеств расширяет класс прикладных и научных задач, которые смогут решать студенты.

### Литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 15-е изд. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – Т. 1. – 607 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ, ТРЕБУЮЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, В ОБУЧЕНИИ ИНЖЕНЕРОВ-ТЕХНОЛОГОВ

А.П. Мателенок, В.С. Вакульчик,  
И.Б. Бурачёнок, Т.И. Завистовская

Для эффективного обучения математике студентов технических специальностей требуется учет принципа профессиональной направленности. Указанный принцип в подготовке специалистов любого профиля выражается в методическом построении содержательных связей обучения их математике с будущей профессиональной деятельностью. Учет принципа профессиональной направленности обеспечивает при этом высокую мотивацию обучающихся к активному и осознанному овладению математическим аппаратом.

Обратимся к специальностям химического профиля. Для выбранных специалистов существует востребованность во владении статистическими методами обработки результатов наблюдений. Химику-исследователю указанные методы требуются при статистической обработке данных эксперимента, расчете погрешностей. Инженеру-технологу приходится на основании статистических методов и оценки параметров распределения определять качество поступающего на технологический процесс сырья, а также готовой продукции. Достаточно часто инженеру-технологу также приходится обращаться к математическому аппарату линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления. Особенно востребованным является аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений как для получения точного решения моделируемого химического процесса, так и приближенного, например, в ходе получения и практического использования данных по кинетике химических процессов.

В этой связи в монографии [1], разработанной для обучения математике студентов технических специальностей спроектирован специальный элемент «Фонд профессионально-ориентированных заданий» с целью стимулирования студентов к расширению математических знаний и формирования у них навыков математического моделирования. Приведем пример задач, представленных в фонде.

**Задача 1.** В цистерне находится раствор объемом  $800 \text{ дм}^3$ , содержащий 200 кг аммиака. В указанную емкость ежеминутно поступает  $100 \text{ дм}^3$  воды. В основании цистерны возникла трещина, через которую вытекает  $1 \text{ дм}^3$  раствора. За счет перемешивания концентрация аммиака в емкости сохраняется равномерной. Определить потери аммиака в цистерне через 40 мин после обнаружения трещины.

**Задача 2.** В цилиндрическом резервуаре хранится бензин (А-95). Паровое пространство над бензином имеет объем  $V_0 = 250 \text{ м}^3$ ; оно сообщается с внешней атмосферой с помощью трубы. Максимальная и минимальная суточные температуры составляют  $37,8^\circ$  и  $10^\circ$ . Барометрическое давление – 760 мм рт. ст. Требуется оценить максимально возможные потери бензина в сутки.

**Задача 3.** В помещении цеха по обжигу железного колчедана вместимостью  $10800 \text{ м}^3$  воздух содержит 0,0003% сернистого газа. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,0001% сернистого газа в количестве  $1500 \text{ м}^3/\text{мин}$ . Предполагая, что концентрация сернистого газа во всех частях помещения в каждый момент времени одна и та же, найти содержание сернистой кислоты через 30 минут после начала работы вентиляторов.

Авторами разработаны специальные формы и средства активизации мыслительной деятельности студентов по формированию у студентов интереса и способностей к решению этих и других задач профессионально ориентированного характера с составлением математической модели, представлением частного алгоритма ее решения, а также с использованием систем компьютерной алгебры.

### Литература

1. Мателенок, А. П. Теоретико-методологические основы проектирования и реализации учебно-методического комплекса нового поколения по математике / А. П. Мателенок, В. С. Вакульчик. – Новополоцк : Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, 2023. – 232 с.
2. Мателенок, А. П. Эффективные формы обучения химиков-технологов: интегрированный модуль / А. П. Мателенок, В. С. Вакульчик // Инженерное образование. – 2023. – № 34. – С. 29–45.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

А.П. Мателенок, И.В. Марченко, С.Ю. Чернов

Современное производство Республики Беларусь предъявляет высокие требования к инженерам-технологам: они должны не только знать, но и внедрять инновационные технологии в промышленность; уметь работать в команде на общий результат; интегрировать знания из разных отраслей науки и применять математическое моделирование химико-физических процессов. В связи с этим подготовка специалистов химико-технологических специальностей требует организации учебного процесса на базе современных образовательных технологий, активных и интерактивных методов обучения, ключевым элементом которых является математическое моделирование.

Для формирования у студентов умения и навыков моделирования, необходимы специальные средства обучения (графические схемы, информационные таблицы, частные алгоритмы решения задач и другие), введенные в состав учебно-методического комплекса, способствующие развитию обобщённых приёмов мыслительной деятельности, среди которых выделяют репродуктивные и эвристические. Отметим, что дисциплины естественно-научного цикла особенно эффективны для развития эвристического мышления. Следует также подчеркнуть специальное средство обучения УМК «Фонд профессионально ориентированных заданий экологического, химико-технологического характера», включающий задачи междисциплинарного характера, демонстрирующие связь между математическими дисциплинами и дисциплинами специального цикла [1].

Ярким примером формирования навыков математического моделирования и реализации междисциплинарных проектов служит участие студентов в научно-исследовательских проектах. Перед каждым студентом ставится задача. Например, изучить применение сорбентов при ликвидации разливов нефтепродуктов с составлением и исследованием математической модели и проверкой результатов с помощью эксперимента [2] или исследовать математическую модель зависимости от времени перемешивания в заданных условиях и качества проб при высаливании нефти во избежание её потерь.

Приведем фрагмент студенческой работы, выполненной студентами специальности 6-05-0711-02 «Переработка нефти и газа и промышленный органический синтез».

Основные преимущества сорбента: отсутствие десорбции; возможность применения на воде и суше; высокая степень очистки; высокая скорость и большой объем впитывания; универсальность (более 85 абсорбируемых веществ); неабразивность сорбента; изолирование летучих горючих паров (подавление паров 90% и более); удобный при транспортировке и применении; не требует специальной подготовки и оборудования при применении и сборе; доступная цена.

При разработке требований к характеристикам фильтрующего оборудования зачастую приходится проводить многочисленные модельные эксперименты. В настоящее время реальные испытательные стенды все чаще заменяются виртуальными. Первым шагом на пути к этому является создание математической модели процесса фильтрации эмульсии сквозь слой сорбента. Рассмотрим гидродинамический процесс фильтрации жидкости сквозь пористую среду. Фильтрация жидкости сквозь пористую среду описывается в литературе обобщенным законом Дарси[2]:

$$\overline{u}_i = \frac{K}{\mu_i} \overline{grad} P,$$

где  $\overline{u}_i$  – линейная скорость фильтрации  $i$ -фазы;

$K$  – проницаемость среды;

$\mu_i$  – вязкость  $i$ -фазы;

$\overline{grad} P$  – градиент давлений по трем направлениям  $x, y, z$ .

Уравнение массопереноса в жидких средах выводится из первого закона Фика о сохранении массы. В общем случае оно выглядит так:

$$\nu \frac{\partial c}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_i \frac{\partial c}{\partial x} \right),$$

где  $c(x, t)$  – средняя концентрация в подвижной фазе (на единицу объема этой фазы);

$a(x, t)$  – средняя концентрация сорбата (на единицу объема слоя);

$D_i$  – коэффициент диффузии;

$\varepsilon$  – пористость;

$x$  – длина;

$t$  – время.

Далее рассматривались другие методы и проводились экспериментальные исследования.

Пример второй работы. Пусть  $1,89 \text{ см}^3$  масла должны быть промыты  $0,340 \text{ м}^3$  водного раствора, содержащего  $10,0 \text{ кг}$  поваренной соли. Методом для определения содержания воды в отбираемых пробах смеси может быть анализ на ион хлора. В конце первой минуты перемешивания отобрано некоторое число проб смеси объемом  $V_0 = 25 \text{ м}^3$  каждая. Найдено, что  $0,2$  этих проб содержат не менее  $10 \text{ мг}$   $\text{NaCl}$ , составляла  $0,75$ . Условием удо-

влетворительного перемешивания является наличие не менее 10 мг  $NaCl$  в пробах. Какой промежуток времени потребуется, чтобы выполнить эти условия?

В ходе реализации исследовательского проекта консультационную поддержку студентам оказывают преподаватели профильных кафедр — в данном случае кафедры математики и компьютерной безопасности, а также кафедры технологии и оборудования переработки нефти и газа.

Предлагаемая методика включения математического моделирования реальных процессов в учебно-познавательную деятельность студентов, на наш взгляд, позволяет установить тесную связь между общепрофессиональными, специальными дисциплинами и математикой. Возникает объективная потребность и возможность переноса математически выраженных свойств и зависимостей в содержание специальных дисциплин. У студентов формируется реальный опыт поиска решений профессионально ориентированных проблем на основе математического моделирования.

### Литература

1. Мателенок, А. П. Междисциплинарная интеграция как основа обучения математике студентов технических специальностей / А. П. Мателенок, В. С. Вакульчик // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – 2022. – № 206. – С. 167–183.
2. Ковалева, В.В. Математическая модель применения сорбентов при ликвидации разливов нефтепродуктов / В.В. Ковалева., В.А. Калинина // ПУТЬ В НАУКУ. ПРИКЛАДНЫЕ НАУКИ. ПРОМЫШЛЕННОСТЬ [Электронный ресурс] : электрон. сб. науч. тр. – Новополюцк : Полоц. гос. ун-т им. Евфросинии Полоцкой, 2024. – Вып. 55(125). – С.193–194.

## МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРЕМ ТИПА ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СПЕЦКУРСЕ ПО ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В.Р. Мисюк

В докладе рассматриваются методические аспекты преподавания одного из разделов спецкурса по теории приближения функций для студентов старших курсов и магистрантов математических специальностей. В нем особое внимание уделяется изучению прямых теорем теории приближений (теорем типа Джексона) в пространствах Харди  $H_p$  и Бергмана  $A_p$ , а также их применению для исследования асимптотического поведения наилучших приближений степенных функций.

Изначально студентам предлагается система задач, направленная на освоение классической теоремы Джексона в  $H_p$ :

$$f^{(s)} \in H_p \implies E_n(f)_p \leq \frac{c}{n^s} \|f^{(s)}\|_{H_p}, \quad n \geq s,$$

где  $E_n(f)_p$  — наилучшее приближение полиномами степени не выше  $n$ , а  $c$  зависит только от  $p$  и  $s$ . На примере функции  $f_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$  (главная ветвь) показывается, как из этого неравенства выводится точная по порядку оценка:

$$E_n(f_\alpha)_p \approx n^{-\alpha-\frac{1}{p}}, \quad \alpha \in (-1/p, \infty) \setminus \mathbb{Z}.$$

Во второй части этого раздела изучается аналог теоремы Джексона в пространстве Бергмана [1]  $A_p$  ( $0 < p < \infty$ ):

$$E_n(f)_{A_p} \leq \frac{c}{n^s} \|f^{(s)}\|_{A_p},$$

и соответствующая слабая эквивалентность для степенной функции:

$$E_n(f_\alpha)_{A_p} \approx n^{-\alpha - \frac{2}{p}}, \quad \alpha \in (-2/p, \infty) \setminus \mathbb{Z}.$$

Методически важным является организация исследовательских проектов в виде заданий для курсовых работ, в которых студентам предлагается:

- сравнить скорости приближения в разных функциональных пространствах (зависимость от параметра  $p$ );
- изучить связь между гладкостью функции ( $s$ ) и порядком приближения;
- рассмотреть обобщения этих результатов на случай рациональных приближений [2].

Описанный подход позволяет сформировать у студентов навыки аналитического исследования, продемонстрировать взаимосвязь между гладкостью функции, её аналитическими свойствами и скоростью приближения полиномами. Опыт чтения данного спецкурса на факультете математики и информатики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы показал достаточную эффективность этого подхода для подготовки специалистов математиков в области теории приближений, а также смежных разделов современного анализа.

### Литература

1. Misiuk, V. R. Theorems for the Best Polynomial Approximations in the Bergman Space / V. R. Misiuk // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. — 2006. — № 1. — P. 58–62.
2. Misiuk, V. R. On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces / V.R. Misiuk // Problems of physics, mathematics and technics. — 2010. — № 1(2). — P. 34–37.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Я. Радыно

В курсе дифференциальных уравнений изучается широкий спектр типов уравнений, а также методов их решения [1]. Здесь я предлагаю озвучить **фундаментальные математические принципы**, которые заложены как в самих уравнениях, так и в методах их решения. Я преследую цель — выявить ключевые понятия, утверждения и алгоритмы, содержащиеся в курсе дифференциальных уравнений, на которые следует постоянно обращать внимание в процессе преподавания.

Курс открывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с постоянными коэффициентами. Это уравнения вида  $r' = ar$ ,  $x'(t) = ax(t) + f(t)$ . Они являются простейшими моделями основных физических явлений. Перечислю основные явления: радиоактивный распад частиц, падение давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря, ослабление интенсивности излучения при прохождении его через

поглощающую среду, ток размыкания, трение ремней, падение тела с высоты, рост растения.

В основу изучения такого вида уравнений положен фундаментальный принцип или понятие — **«геометрическая прогрессия»**.

Далее рассматриваются линейные дифференциальные уравнения  $n$ -ого порядка с постоянными коэффициентами, в основе — **«сумма геометрических прогрессий»**.

Следующие в программе курса — линейные дифференциальные векторные уравнения с постоянными коэффициентами  $\vec{x}' = A\vec{x}$ . Метод решения таких уравнений основан на вычислении экспоненты матрицы. В этом случае применяется **«теорема Евклида о делении с остатком»**.

Обоснование существования и единственности задачи Коши  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  даётся с помощью теоремы Пикара, с использованием метода последовательных приближений. Базовый принцип в этом случае — **«алгоритм Евклида»**.

Перехожу к уравнению первого порядка в нормальной дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Данное уравнение означает, что вектор  $(P, Q)$  ортогонален вектору  $(dx, dy)$ . Вопросу ортогональности в курсе дифференциальных уравнений также посвящена задача И.Бернулли (о построении траекторий ортогональных данному однопараметрическому семейству линий). Кроме того, в курсе математического анализа в разделе «Функции комплексного переменного» рассматривается понятие дифференцируемости функции комплексного переменного. Следует обратить внимание, что функция комплексного переменного — это тот аппарат, который даёт два семейства ортогональных друг другу траекторий [2]. Указанные задачи дифференциальных уравнений и математического анализа практически применяются в электростатике, гидро-аэродинамике, также в эфиродинамике. Во всех вышеназванных задачах проявляется принцип — **«силовые и эквипотенциальные линии»**.

Далее в курсе дифференциальных уравнений излагаются линейные уравнения с голоморфными коэффициентами и метод построения их решений при помощи степенных рядов. В основу решения положен принцип **«теорема Евклида о делении с остатком»**.

При изучении движения и устойчивости движения используются системы нелинейных дифференциальных уравнений и первые интегралы (законы сохранения). В этом случае применяется ряд принципов: **«основное свойство пропорций»**, **«интегралы движения»**, **«сведение системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений»**, **«силовые и эквипотенциальные линии»**, а также **«вихревые и тороидальные поля»**.

В заключение курса изучается тема «Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка», в основе которой лежит принцип **«основное свойство пропорций»**.

Итак, подчеркну главное, а именно, то, что изучая дифференциальные уравнения и методы их решения, студенты практически используют фундаментальные математические понятия и принципы: **«геометрическая прогрессия»**, **«теорема Евклида о делении с остатком»**, **«алгоритм Евклида»**, **«силовые и эквипотенциальные линии»**, **«основное свойство пропорций»**.

Обращая внимание на указанные фундаментальные математические понятия, утверждения и алгоритмы, возможно формировать у студентов чёткую картину происхождения

математических моделей, описывающих как явления Природы, так и работу механизмов, созданных Человеком.

### Литература

1. Богданов, Ю. С., Мазаник, С. А., Сыроид, Ю. Б. Курс дифференциальных уравнений: Учебное пособие / Ю. С. Богданов, С. А. Мазаник, Ю. Б. Сыроид. – Минск : Універсітэцкае, 1996. – 287 с.
2. Лаврентьев, М. А., Шабат, Б. В. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : ГИФМЛ, 1958. – 678 с.

## О НОРМАЛЬНОМ ПСЕВДОРЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Г.П. Размыслович, А.В. Филиппов

При решении различных задач математического моделирования очень часто возникает задача решения систем линейных алгебраических уравнений. Однако, если в процессе моделирования происходили погрешности измерений, то такие системы могут оказаться несовместными. В этом случае часто находят значения неизвестных, при которых разница между обеими частями уравнений системы минимальна, то есть строят оптимальное в некотором смысле приближение. Одним из методов построения таких приближений является метод наименьших квадратов, в основе которого лежат понятия псевдорешения и нормального псевдорешения линейной системы [1–6].

Рассмотрим линейную неоднородную систему уравнений

$$A_1x_1 + \dots + A_nx_n = B, \quad A_i, B \in \mathbb{R}_{m,1}. \quad (1)$$

Пусть  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{1,n}$  – произвольная последовательность арифметического пространства  $\mathbb{R}_{1,n}$ . Столбец

$$d(y) = A_1y_1 + \dots + A_ny_n - B$$

называется невязкой последовательности  $y$  для системы (1). Если последовательность  $y$  является решением системы (1), то ее невязка равна нулю.

Пусть система (1) несовместна. Псевдорешением несовместной системы (1) называется последовательность  $y^* \in \mathbb{R}_{1,n}$ , имеющая невязку с минимальной нормой, то есть

$$\|d(y^*)\| = \min_{x \in \mathbb{R}_{1,n}} \|d(x)\| = \min_{x \in \mathbb{R}_{1,n}} \sqrt{\sum_{i=1}^m d_i^2(x)},$$

где  $d_i(x)$  – элементы столбца  $d(x)$ . Псевдорешение с минимальной нормой называется нормальным псевдорешением системы (1). Несовместная система имеет только одно нормальное псевдорешение.

Пусть  $L$  – линейная оболочка системы столбцов  $A_1, \dots, A_n$ . Так как система (1) несовместна, то  $B \notin L$ . Следовательно, столбец  $B$  представим в виде  $B = B_1 + B_2$ , где  $B_1 \in L$ ,

$B_2 \in L^\perp$ , причем  $B_2 \neq 0$ . Но тогда столбец невязки  $d(y)$  произвольной последовательности  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{1,n}$  имеет вид

$$d(y) = (A_1 y_1 + \dots + A_n y_n - B_1) - B_2,$$

где  $A_1 y_1 + \dots + A_n y_n - B_1 \in L$ ,  $B_2 \in L^\perp$ . Следовательно,

$$\|d(y)\|^2 = \|A_1 y_1 + \dots + A_n y_n - B_1\|^2 + \|B_2\|^2.$$

Заметим, что если

$$A_1 y_1 + \dots + A_n y_n = B_1, \quad (2)$$

то норма  $\|d(y)\|$  принимает наименьшее значение  $\|B_2\|$ . Следовательно, любое решение системы (2) является псевдорешением системы (1).

Пусть  $A = [A_1, \dots, A_n] \in \mathbb{R}_{m,n}$ , – матрица, составленная из столбцов  $A_i$ . Домножив уравнение (2) на матрицу  $A^T$ , получим

$$A^T(A_1 y_1 + \dots + A_n y_n) = A^T B_1.$$

Но  $A^T B_1 = A^T(B - B_2) = A^T B - A^T B_2$ . Так как  $B_2 \in L^\perp$ , то  $A^T B_2 = 0$ . Следовательно,  $A^T B_1 = A^T B$ . Учитывая, что  $\text{rank } A^T A = \text{rank } A$ , получим раносильность системы (2) и системы

$$A^T(A_1 y_1 + \dots + A_n y_n) = A^T B. \quad (3)$$

Заметим, что система (3) может быть получена из системы (2) с помощью умножения матриц и не требует поиска ортогональной проекции столбца  $B$  на линейную оболочку  $L$ .

Если столбцы  $A_1, \dots, A_n$  линейно независимы, то есть  $\text{rank } A = n$ , то равносильные системы (2) и (3) имеют единственное решение. В этом случае это решение является нормальным псевдорешением системы (1). Пусть система (2) имеет бесконечное количество решений. Тогда множество решений системы (2) имеет вид  $y_0 + L_0$ , где  $y_0$  – некоторое частное решение системы (2),  $L_0$  – пространство решений однородной приведенной для системы (2) системы  $A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = 0$ . Представив последовательность  $y_0$  в виде суммы  $y_0 = \tilde{y}_0 + \tilde{\tilde{y}}_0$ ,  $\tilde{y}_0 \in L_0$ ,  $\tilde{\tilde{y}}_0 \in L_0^\perp$ , получим, что все решения системы (2) имеют вид

$$y = (\tilde{y}_0 + x_0) + \tilde{\tilde{y}}_0, \quad \tilde{y}_0 + x_0 \in L_0, \quad \tilde{\tilde{y}}_0 \in L_0^\perp.$$

Следовательно,

$$\|y\|^2 = \|\tilde{y}_0 + x_0\|^2 + \|\tilde{\tilde{y}}_0\|^2,$$

причем, если  $\|\tilde{y}_0 + x_0\| = 0$ , то имеем равенство  $\|y\| = \|\tilde{\tilde{y}}_0\|$ .

Таким образом, ортогональная составляющая  $\tilde{\tilde{y}}_0$  любого псевдорешения  $y$  системы (1) относительно подпространства  $L_0$  является нормальным псевдорешением.

### Литература

1. Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М.: Наука, 1983.
2. Воеводин, В. В. Линейная алгебра / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1980.
3. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967.
4. Канатников, А.Н. Линейная алгебра / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

5. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра: учебное пособие / Г. П. Размыслович, А. В. Филиппов. – Минск: РИВШ, 2024.

6. Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и основы алгебры / Е. Е. Тыртышников. – М.: МЦНМО, 2025.

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РАЗНОУРОВНЕВОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКОГО ВУЗА**

**Е.Л. Старовойтова**

Решение многих вопросов математической подготовки студентов технического вуза требует совершенствования методики преподавания математики, а преодоление пассивности студентов в освоении математического содержания и его приложений вызывает необходимость активизации процесса обучения математике. Математические знания могут быть качественно сформированы только при условии личной заинтересованности в них студента, понимании им значимости этих знаний в будущей профессиональной деятельности. Преподавание математики необходимо требует решения методической проблемы создания условий, обеспечивающих возможность включения каждого студента в активную деятельность по освоению программного материала с учётом зоны его ближайшего развития, и организации самостоятельного (или управляемого) усвоения содержания курса математики в соответствии с индивидуальными особенностями и потребностями обучающегося (индивидуальными способностями, темпом обучения и уровнем школьной математической подготовки).

Одной из педагогических технологий, которая учитывает индивидуальные способности и особенности личности каждого обучающегося, является разноуровневое обучение, в условиях которого организация образовательного процесса предполагает разный уровень усвоения (по глубине и сложности) одного и того же учебного материала.

При изучении дисциплины «Математика» в техническом вузе мы выделяем три уровня дифференциации с учетом обученности и профессиональной направленности: пороговый уровень (дает нижнюю границу знаний по дисциплине с позиции требований Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования; продвинутый уровень (расширяет материал первого уровня, увеличивает объем сведений, требует углубленного знания системы понятий и умения решать задачи в рамках изучаемой дисциплины); высокий уровень (существенно углубляет материал курса, дает возможность студенту проявить себя в решении и самостоятельном составлении задач, в том числе, и профессиональной направленности, по всему курсу изучаемой дисциплины).

Учитывая индивидуальные особенности каждого студента и тот факт, что студенты одной и той же группы могут показать разный результат по определенной теме, указанные уровни подвижны по своему составу. Для каждого уровня преподаватель определяет, что студент должен знать, уметь, и чем должен владеть на данном уровне. Цель разделения студентов на группы состоит в том, чтобы привести требования к обучающимся в соответствии с их возможностями, создать оптимальные условия для обучения и способствовать переходу обучающегося из одной группы в другую. Разноуровневый подход в обучении возможно реализовать на любом этапе учебного занятия с использованием групповой и индивидуальной форм работы.

В соответствии с целями и содержанием математического образования будущих специалистов технической направленности отметим некоторые методические аспекты практической реализации идей разноуровневого обучения. Важнейшими из них мы считаем следующие:

- адаптация студентов к вузовскому обучению содержательно и процессуально, освоение ими новых способов познавательной деятельности. Методически значимо в процессе адаптации смещение приоритетов образования в сторону внимания к личности студента, его интересам, потребностям и индивидуальным особенностям. Это требует создания особых условий организации обучения математике, которые обеспечивали бы студентов эффективными навыками и приёмами учебно-познавательной деятельности, самостоятельной работы, ориентировали бы в новых условиях изучения математики. В практике преподавания это выражается в более чёткой структурированности учебного процесса и технологичности его организации [1];

- организация обучения математике в соответствии с принципами личностно ориентированного образования: создание ситуаций успеха и защищённости в случае неудачи; поддержка личности студента в индивидуальном образовательном маршруте. Этот аспект методики преподавания математики в вузе требует, в частности, методического обеспечения актуализации знаний и способов действий с помощью соответствующих методических приемов (использование указаний к повторению теоретических вопросов и ранее решенных задач; обоснование предложенного (готового) решения задачи известными теоретическими положениями; воспроизведение решения по готовому рисунку или его части с требованием дополнить рисунок; предъявление и обоснование решения задачи с пропусками фрагментов решения и др.) [2];

- преемственность в обучении математике между школьными и вузовскими знаниями и между знаниями внутри вузовского курса с учётом требований содержательной и процессуальной преемственности, реализуемых, например, при использовании методического приема представления готового разноуровневого предписания к решению задачи на этапе применения теории;

- усиление прикладной (профессиональной) направленности обучения, определяющей необходимость формирования и совершенствования навыков математического моделирования посредством разноуровневых схем;

- развитие навыков оперирования большим объёмом информации и выполнения уровней самостоятельных работ, которые необходимы для непрерывного самообразования и самосовершенствования будущего специалиста. Это требует применения новых форм и методов в практике обучения математике, например, активных методов обучения при самостоятельном изучении темы содержания курса по предложенному преподавателем плану (методическому предписанию) [1].

За время изучения математики (первый курс) в техническом вузе происходит формирование у студентов основных учебных навыков, и правильно организованный процесс обучения с учетом индивидуальных особенностей студентов в условиях разноуровневого подхода, способствуя адаптации к вузовскому обучению, обеспечивает успешность изучения специдисциплин на старших курсах.

Применение педагогической технологии разноуровневого обучения делает образовательный процесс более эффективным, способствует повышению качества обучения и активной познавательной деятельности обучающихся. Трудности использования такого обучения связаны как с недостаточной разработанностью методических материалов для его организации, так и внедрением существующих методических разработок для преподавателей и учебных материалов для студентов.

## Литература

1. Старовойтова, Е. Л. Методические особенности преподавания математики в техническом вузе в контексте активизации учебно-познавательной деятельности студентов / Е.Л. Старовойтова // Матэматыка. – 2022. – № 1(137). – С. 27–38.
2. Старовойтова, Е.Л. Актуализация знаний как методический фактор обеспечения их применения в математической подготовке студентов первого курса технического вуза /Е.Л. Старовойтова// Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. Е. Педагогические науки. – 2020. – № 15. – С. 48–55.

## ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПРЯМОЙ: СЕМИНАРСКОЕ ЗАНЯТИЕ

О.Д. Фролкина

Одна из важных тем университетского курса аналитической геометрии — пересечение кривой второго порядка с прямой [1, Глава XVII]. В рамках этой темы проводятся несложные вычисления, которые позволяют, в первую очередь, ввести понятие асимптотического направления. Далее с использованием этих вычислений определяются и записываются аналитически касательные, центры, диаметры. Зачастую эти выкладки вызывают трудности у первокурсников, представляются технически громоздкими. Поэтому было бы желательно проработать варианты этих вычислений на семинарах, на конкретных ясных интересных примерах, дало бы возможность сознательно усвоить происходящее, прежде чем переходить к следующим темам. О важнейших методических принципах см. [2, 4.6].

Здесь мы собрали несколько таких упражнений. Помимо сказанного, они демонстрируют пользу аналитического метода в геометрии.

**Задача 1.** [3, с. 177], [4, с. 74, задача 49] Через произвольную точку  $O$  проведены две секущие, встречающие линию второго порядка в точках  $M_1, M_2$  и  $N_1, N_2$ . Доказать, что отношение  $\frac{OM_1 \cdot OM_2}{ON_1 \cdot ON_2}$  не зависит от точки  $O$  при условии, что направления секущих остаются неизменными.

Для доказательства вводим прямоугольную систему координат. Пусть  $(a, b)$  — координаты точки  $O$ . Секущие, проходящие через  $O$ , записываем в виде  $x = a + tu, y = b + tv$  и  $x = a + tw, y = b + ts$ , где  $t$  — параметр, а  $\{u, v\}$  и  $\{w, s\}$  — направляющие векторы секущих. Подставляем эти уравнения в уравнение линии второго порядка, выражаем произведение корней  $t_1 \cdot t_2$  для каждой из секущих по теореме Виета. Убеждаемся, что нужное отношение не зависит от  $a, b$ . Подробнее см. [3, с. 177] или [4, с. 238].

Можно сразу предложить обобщение:

**Теорема Ньютона.** [5, с. 26] Если через точку  $O$  провести две прямые, которые пересекают кривую  $k$ -го порядка в точках  $M_1, \dots, M_k$  и  $N_1, \dots, N_k$ , то отношение

$$\frac{OM_1 \cdot OM_2 \cdot \dots \cdot OM_k}{ON_1 \cdot ON_2 \cdot \dots \cdot ON_k}$$

есть величина постоянная, не зависящая от точки  $O$ , при условии, что направления секущих остаются неизменными.

Аналогично решается

**Задача 2.** [3, с. 177], [4, с. 74, задача 50] Через две точки  $O$  и  $O'$  проведены две параллельные секущие, встречающие линию второго порядка в точках  $M, N$  и  $M', N'$ .

Доказать, что отношение  $\frac{OM \cdot ON}{O'M' \cdot O'N'}$  не зависит от направления секущих при условии, что точки  $O$  и  $O'$  остаются неизменными.

Эта задача решается аналогично предыдущей, см. [3, с. 177] или [4, с. 238]. Полезно предложить успевающим студентам подумать над обобщением этого факта.

У результатов задач 1, 2 есть красивые частные случаи. Здесь полезно отдельно рассмотреть случай окружности — получаются простые факты, хорошо известные из школы.

**Задача 3.** [3, с. 178], [4, с. 74, задача 51] Доказать, что для всякой центральной кривой второго порядка произведения отрезков, на которые разделяют друг друга две пересекающиеся хорды, относятся между собою, как квадраты диаметров, параллельных этим хордам.

**Задача 4.** [3, с. 178], [4, с. 74, задача 52] Доказать, что длины двух касательных, проведенных из какой-нибудь точки к центральной кривой второго порядка, относятся между собой, как диаметры, параллельные этим касательным.

Еще одно замечательное приложение этих же идей — теорема Карно:

**Теорема Карно.** Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $BC$  взяты точки  $A_1$  и  $A_2$ , на стороне  $AC$  — точки  $B_1$  и  $B_2$ , на стороне  $AB$  — точки  $C_1$  и  $C_2$ . Доказать, что черед точки  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  проходит кривая второго порядка тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1 \cdot AB_2 \cdot BC_1 \cdot BC_2 \cdot CA_1 \cdot CA_2}{CB_1 \cdot CB_2 \cdot AC_1 \cdot AC_2 \cdot BA_1 \cdot BA_2} = 1.$$

Необходимость сформулирована в [4, с. 74, задача 53] и доказывается идеями, описанными выше, см. [4, с. 238].

Доказательство достаточности может быть задано успевающим студентам отдельно (нетривиален даже частный случай, когда  $A_1 = A_2, B_1 = B_2, C_1 = C_2$ , а линия должна коснуться сторон треугольника).

### Литература

1. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры. С приложением собрания задач, снабженных решениями, составленного А.С. Пархоменко / П. С. Александров. — Москва : Наука, 1968. — 911 с.
2. Костенко, И.П. “Реформы” образования в России 1918–2018 (идеи, методология, результаты): монография. Изд. 5-е, испр. и доп. / И. П. Костенко. — Москва; Ижевск : Институт компьютерных исследований; НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2025. — 216 с.
3. Сальмон, Ж. Курс аналитической геометрии двух измерений (конические сечения) / Ж. Сальмон. — С.-Петербург : издание В. И. Губинского, 1908. — 487 с.
4. Андреев, К.А. Сборник упражнений по аналитической геометрии. Издание третье. С приложением решений. / К. А. Андреев. — Москва, 1915. — 366 с.
5. Савелов, А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство) / А. А. Савелов. — Москва, 1960. — 293 с.

## МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

А.Х. Хыдырова

Методика преподавания математики в высшей школе является важной областью педагогической науки, направленной на совершенствование процесса обучения студентов математическим знаниям, формирование логического и аналитического мышления, а также

развитие умений применять математические методы при решении научных и практических задач. В современных условиях высшее образование ориентировано не только на передачу определённого объёма знаний, но и на формирование профессиональных компетенций будущих специалистов. В связи с этим преподавание математики должно строиться таким образом, чтобы студенты могли не только усваивать теоретический материал, но и понимать его практическую значимость, применять полученные знания в различных областях науки, техники и экономики.

Современная методика преподавания математики предполагает использование различных педагогических подходов и технологий обучения. Традиционная лекционная форма остаётся важной частью образовательного процесса, поскольку позволяет системно и последовательно представить теоретический материал. Однако для повышения эффективности обучения лекции часто дополняются практическими занятиями, семинарами, самостоятельной работой студентов и использованием цифровых образовательных ресурсов. Такой комплексный подход способствует лучшему усвоению материала и формированию устойчивых навыков решения задач.

Важным элементом методики преподавания является правильный выбор содержания учебного материала. Преподаватель должен стремиться к тому, чтобы представляемая информация была логически структурированной, последовательной и доступной для понимания студентами. При этом необходимо соблюдать баланс между теоретической глубиной и практической направленностью курса. Чрезмерная перегруженность сложными доказательствами может затруднить восприятие материала, тогда как недостаточная теоретическая база снижает уровень фундаментальной подготовки студентов. Поэтому эффективная методика обучения предполагает разумное сочетание различных форм и методов преподавания.

Практические занятия играют важную роль в закреплении теоретических знаний. Во время таких занятий студенты решают задачи различной сложности, анализируют математические модели, учатся применять теоретические положения на практике. Работа с задачами способствует формированию навыков самостоятельного мышления и развитию математической интуиции. Кроме того, обсуждение решений в аудитории помогает студентам увидеть различные подходы к решению одной и той же задачи, что расширяет их представление о возможностях математического анализа.

Значительное место в образовательном процессе занимает самостоятельная работа студентов. В условиях высшего образования именно самостоятельная деятельность становится основой формирования профессиональных компетенций.

Современное развитие информационных технологий оказывает существенное влияние на методику преподавания математики. Использование компьютерных программ, математических пакетов и интерактивных образовательных платформ позволяет визуализировать сложные математические процессы, проводить вычисления и моделирование, анализировать большие объёмы данных. Внедрение цифровых технологий делает учебный процесс более наглядным и динамичным, а также способствует повышению интереса студентов к изучению математических дисциплин.

Важным направлением совершенствования преподавания математики является применение методов проблемного обучения. Суть данного подхода заключается в создании учебных ситуаций, требующих от студентов активного поиска решения. Преподаватель формулирует проблему, предлагает исходные данные и направляет студентов к самостоятельному анализу возможных решений. Такой подход стимулирует познавательную активность, развивает критическое мышление и способствует более глубокому пониманию изучаемого материала.

Современные тенденции развития образования требуют постоянного совершенствования методических подходов, внедрения инновационных технологий и поиска новых путей повышения качества математической подготовки студентов.

### Литература

1. Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе. – Москва: Высшая школа, 2019.
2. Зимняя И.А. Педагогика высшей школы. – Москва: Логос, 2020.
3. Колмогоров А.Н. Основы преподавания математики. – Москва: Наука, 2018.
4. Поляков В.А. Методика преподавания математики в вузе. – Санкт-Петербург: Питер, 2021.
5. Скаткин М.Н. Дидактика высшей школы. – Москва: Просвещение, 2019.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ SYMPY

Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич

Использование систем компьютерной математики (СКМ) в преподавании математических дисциплин позволяет качественно изменить подходы к обучению, сделать излагаемый материал более наглядным, доступным и интересным для студентов, что является важным фактором повышения качества образования [1]. Применение систем компьютерной математики уменьшает количество математических преобразований, акцентируя внимание на анализе результатов, расширяет круг доступных для аналитического решения задач, обеспечивает возможность представления результатов вычислений в графической форме. Визуализация промежуточных результатов и решения задачи облегчает студенту понимание сути исследуемых процессов и явлений, изменения решения в зависимости от значений используемых параметров или переменных.

SymPy — это бесплатная библиотека для символьных вычислений на языке Python [2]. Рассмотрим применение SymPy для аналитического решения линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + a_{12} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} u(x, t) + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \\ & + b_1 \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + b_2 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + cu(x, t) = f(x, t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным и граничным условиям:

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \right|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$\left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \beta_1 u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad \left( \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + \beta_2 u(x, t) \right) \Big|_{x=\ell} = \mu_2(t). \quad (3)$$

Обозначим через  $U(x, p)$  изображение функции  $u(x, t)$ :

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) \exp(-pt) dt.$$

Считая переменную  $x$  параметром, применяя правило дифференцирования оригинала и учитывая условия (2), преобразуем (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно изображения  $U(x, p)$  (дифференцирование выполняется только по переменной  $x$ ):

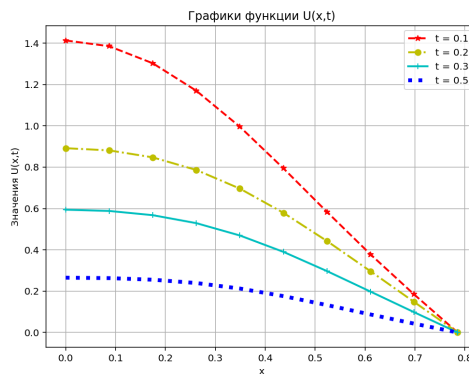
$$\begin{aligned} a_{22} \frac{d^2}{dx^2} U(x, p) + (a_{12}p + b_2) \frac{d}{dx} U(x, p) + (a_{11}p^2 + b_1p + c) U(x, p) = \\ = F(x, p) + a_{12} \frac{d}{dx} \varphi_1(x) + (b_1 + a_{11}p) \varphi_1(x) + a_{11} \varphi_2(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя функцию `dsolve` [3], находим аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения (4) с учетом преобразованных граничных условий (3):

$$\left( \alpha_1 \frac{d}{dx} U(x, p) + \beta_1 U(x, p) \right) \Big|_{x=0} = \psi_1(p), \quad \left( \alpha_2 \frac{d}{dx} U(x, p) + \beta_2 U(x, p) \right) \Big|_{x=\ell} = \psi_2(p), \quad (5)$$

где  $F(x, p)$ ,  $\psi_1(p)$ ,  $\psi_2(p)$  – образы функций  $f(x, t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  соответственно.

На основании полученного аналитического решения задачи (4)–(5)  $U(x, p)$ , находим аналитическое решение поставленной задачи теплопроводности с помощью обратного преобразования Лапласа (функция `inverse_laplace_transform` [3]).



**Рис. 1.** Графики функции  $u(x, t)$  для некоторых значений  $t$

Пример. Найти аналитическое решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \cos t \cos 10x, \quad 0 < x < \pi/4, \quad t > 0,$$

удовлетворяющего начальному и граничным условиям

$$u(x, t)|_{t=0} = 2 \cos 2x + 3 \cos 6x, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad u(\pi/4, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Результаты вычислений.

Дифференциальное уравнение (4) для данной задачи:

$$-pU(x) + \frac{d^2}{dx^2}U(x) = \frac{p \cos(10x)}{p^2 + 4} - 2 \cos(2x) - 3 \cos(6x).$$

Аналитическое решение граничной задачи (4)–(5):

$$U(x) = -\frac{p \cos(10x)}{p^3 + 100p^2 + 4p + 400} + \frac{3 \cos(6x)}{p + 36} + \frac{2 \cos(2x)}{p + 4}.$$

Аналитическое решение задачи теплопроводности

$$u(x, t) = -\left(\frac{\sin(2t)}{5002} + \frac{25 \cos(2t)}{2501} - \frac{25e^{-100t}}{2501}\right) \cos(10x) + 2e^{-4t} \cos(2x) + 3e^{-36t} \cos(6x).$$

### Литература

1. Шушкевич, Г. Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учеб. пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова. – Ч. 2. – 2012. – 256 с.
2. SymPy. – URL: <https://www.sympy.org/en/index.html> (дата обращения 20.03.2026).
3. Solvers. – URL: <https://docs.sympy.org/latest/tutorials/intro-tutorial/solvers.html> (дата обращения 10.03.2026).

## АВТОРЫ ДОКЛАДОВ

**Абрашина-Жадаева Н.Г.** zhadaeva282@gmail.com. Ветеран труда, свободный исследователь-педагог, Минск, Беларусь. С. 69.

**Андрушкевич И.Е.** racursj@yandex.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 3.

**Антоневич А.Б.** antonevich@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 50.

**Асташова И.В.** ast.diffiety@gmail.com. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия. С. 71.

**Бекиев А.Б.** ashir1976@mail.ru. Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 5.

**Белько О.Н.** belko\_on@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 6, 25.

**Березкина Л.Л.** berezkina.l51@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.

**Березкина Н.С.** korotkaja3@gmail.com. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 122.

**Борухов В.Т.** borukhov@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 73.

**Братковский Е.В.** bratkovsky.evgeny@yandex.com. Астон софт, Braiora LLC, Минск, Беларусь. С. 82.

**Бураченко И.Б.** irina.psu@psu.by. Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 123, 141.

**Вакульчик В.С.** v.vaculchik@psu.by. Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 123, 141.

**Валовик Д.В.** dvalovik@mail.ru. Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. С. 74.

**Васильев В.Б.** vbv57@inbox.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 52.

**Васьковский М.М.** vaskovskii@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 76, 136.

**Волков В.М.** v.volkov@tut.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 78.

**Волчѣк В.С.** vlad.volchek@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 73.

**Вувуникян Ю.М.** vuv64@mail.ru. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 53.

**Гарипов И.Б.** ilnur\_garipov@mail.ru. Казанский федеральный университет, Казань, Россия. С. 8.

**Гладков А.Л.** gladkoval@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 9.

- Гламаздин И.И.** i.glamazdin@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 80.
- Гнездовский Ю.Ю.** gnezdovsky@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11.
- Гринь А.А.** grin@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 122.
- Громыко Г.Ф.** grom@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 78.
- Дайняк В.В.** dvv162@tut.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 13, 134.
- Деревяго А.Н.** dzeraviahaAN@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120, 125, 127.
- Дубатовская М.В.** dubatovska@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 27.
- Дун Ц.** 741704563cc@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 78.
- Дымков М.П.** dymkov\_m@bseu.by. Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь. С. 82.
- Дымков С.М.** dymkous@gmail.com. Центр аналитических решений, МТБанк, Минск, Беларусь. С. 82.
- Дюньдяева А.А.** andyundyaeva@gmail.com. Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. С. 74.
- Егоров А.А.** andrejegov69@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.
- Ефремов А.А.** efremov.kafei@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 129.
- Жалукевич Д.С.** den.zhal@yandex.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 15.
- Жук А.И.** aizhuk85@mail.com. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 130.
- Завистовская Т.И.** t.zavistouskaya@psu.by. Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 141.
- Защук Е.Н.** shvichkina@tut.by. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 130.
- Заяц Г.М.** zayats@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 73.
- Зеленков В.И.** vzelenkov@yandex.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 132.
- Зорько М.Ю.** matwejzorka2005@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 76.
- Каркоцкий А.Г.** KarkotskiyAG@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 134.

- Каянович С.С.** kayanovichs@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 16.
- Ким А.В.** avkim@imm.uran.ru. Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия. С. 109.
- Клименко И.И.** 1065039@bsuedu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 52.
- Козловская И.С.** kozlovskaja@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 18, 134.
- Кононова О.А.** KonanovaOA@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 125.
- Корзюк В.И.** korzyuk@bsu.by. Институт математики НАН Беларуси, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 18, 19.
- Кратович П.С.** tehnologia@mniirm.by. ОАО «Минский НИИ радиоматериалов», Минск, Беларусь. С. 73.
- Кузьменкова Е.Ю.** ekuzmenkova83@gmail.com. Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь. С. 57.
- Куликов А.Н.** anat\_kulikov@mail.ru. Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, Ярославль, Россия. С. 21.
- Куликов Д.А.** kulikov\_d\_a@mail.ru. Ярославский государственный университет имени П.Г. Демидова, Ярославль, Россия. С. 21.
- Кушель О.Ю.** kushel@mail.ru. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 73.
- Лаврова О.А.** lavrovaolga@mail.ru. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 85.
- Лашин Д.А.** dalashin@gmail.com. Научно-производственная фирма «ФИТО», Москва, Россия. С. 71.
- Лебедев А.В.** lebedev@bsu.by. Институт математики НАН Беларуси, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 87.
- Леваков А.А.** levakov123321@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 136.
- Лишик К.Я.** lishykksu@gmail.com. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 80.
- Лобанова Н.И.** lobantchik@yandex.ru. Центр внешкольной работы, Зеленокумск, Россия. С. 137.
- Ловшенко И.Ю.** lovshenko@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 73.
- Люксембург И.Л.** josef2016kolbasidze@mail.ru. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 50.
- Мавлявиев Р.М.** mavly72@mail.ru. Казанский федеральный университет, Казань, Россия. С. 8.
- Макарова Н.П.** makarova\_np@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Беларусь. С. 138.
- Маковеева П.Е.** p.e.makoveeva@spbu.ru. Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. С. 23.

- Максимов М.С.** maksimau.mikhail@gmail.com. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 73.
- Мармыш Д.Е.** marmyshdenis@mail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 89.
- Мартынова В.Ю.** lynxbax@mail.ru. Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. С. 74.
- Марченко И.В.** marchenko@m.msu.by. Могилевский государственный университет имени А.А. Кулепова, Могилев, Беларусь. С. 140, 142.
- Мателенок А.П.** a.matelenok@psu.by. Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Новополоцк, Беларусь. С. 123, 141, 142.
- Матысик О.В.** matysikoleg@mail.ru. Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, Брест, Беларусь. С. 55.
- Махамуд А.А.** 1269765@bsuedu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 91.
- Миротин А.Р.** amirotin@yandex.by. Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь. С. 57.
- Мисюк В.Р.** vmisuk@gmail.com. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 144.
- Москалева М.А.** m.a.moskaleva1@gmail.com. Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. С. 105.
- Немец В.С.** nemets@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 122.
- Новиков П.Э.** p.novikov@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 73.
- Нуржанов Б.О.** nurjanovberdakh@gmail.com. Институт математики имени В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан. С. 60.
- Нуржанова А.О.** arzayimnurjanova@gmail.com. Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза, Нукус, Узбекистан. С. 60.
- Овсянников В.М.** ovsyannikovvm@yandex.ru. Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ), Москва, Россия. С. 92.
- Павлючик П.Б.** p.pavlyuchik@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11.
- Перцев Н.В.** pertsevnv@mail.ru. Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия. С. 94.
- Письман Т.А.** vlad.volchek@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 73.
- Пичугина А.Н.** anna.pichugina@gmail.com. Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Россия. С. 94.
- Подберезский А.В.** rav@im.bas-net.by. Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь. С. 78.
- Полевилов В.К.** viktor.polevnikov@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 85.

- Проневич А.Ф.** pranevich@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 11, 25, 96, 138.
- Радыно Н.Я.** mir@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 145.
- Размыслович Г.П.** razmysl@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 147.
- Рогозин С.В.** rogosinsv@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 27.
- Рузиев М.Х.** ruzievmkh@gmail.com. Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан. С. 29.
- Русилко Т.В.** rusilko@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 98.
- Рушнова И.И.** rushnovabsu@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.
- Рябченко Н.В.** nmankevich@tut.by. Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь. С. 30.
- Сарсенбаева Г.О.** gozzalsarsenbaeva13@gmail.com. Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан. С. 29.
- Свистун А.Ч.** svistun\_ach@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 107.
- Селютин В.Д.** selutin\_v\_d@mail.com. Орловский государственный университет, Орел, Россия. С. 137.
- Снегур М.О.** snegur.max15@gmail.com. Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. С. 105.
- Солиев Ю.С.** su1951@mail.ru. Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия. С. 61.
- Сопова Т.В.** sopova\_t@bsuedu.ru. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия. С. 52.
- Станкевич А.В.** Prestigioalexandr@gmail.com. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 107.
- Старовойтов А.П.** svoitov@gsu.by. Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь. С. 30.
- Старовойтова Е.Л.** stelle@tut.by. Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь. С. 149.
- Статкевич С.Э.** sstat@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 100.
- Столярчук И.И.** stolyarchuk.ivan.i@gmail.com. ООО «Нэкстсофт», Минск, Беларусь. С. 19.
- Сьянов Д.А.** syanov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 101.
- Таныгина А.Н.** anastminsk@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 103.

- Тихов С.В.** tik.stanislav2015@yandex.ru. Пензенский государственный университет, Пенза, Россия. С. 105.
- Трифенова И.В.** irinat@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 53.
- Филиновский А.В.** flnv@yandex.ru. МГТУ имени Н.Э. Баумана, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 71.
- Филиппова Н.К.** Filipava@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120, 127.
- Филипцов А.В.** filiptsov@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 147.
- Фролкина О.Д.** olga-frolkina@yandex.ru. МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия. С. 151.
- Хацкевич Г.А.** g.khatskevich@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 96.
- Худайкулиев Б.А.** bazargeldyh@yandex.ru. Туркменский государственный институт финансов, Ашхабад, Туркменистан. С. 32.
- Хуштова Ф.Г.** khushtova@yandex.ru. Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», Нальчик, Россия. С. 34.
- Хыдырова А.Х.** altynhydytowa15@gmail.com. Туркменский государственный институт финансов, Ашхабад, Туркменистан. С. 152.
- Цехан О.Б.** tsekhan@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 107.
- Чайковский М.В.** m.chajkovskij@bsuir.by. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь. С. 96.
- Чеб Е.С.** cheb@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 35, 134.
- Чернов С.Ю.** chernovsy@bsu.by. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 142.
- Чернявский М.М.** misha360ff@mail.ru. Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Беларусь. С. 87.
- Чехменок Т.А.** TChekhmenok@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 120.
- Шананин Н.А.** nashananin@inbox.ru. Государственный университет управления, Москва, Россия. С. 37.
- Шеина В.А.** veronikaseina@gmail.com. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 130.
- Шилин А.П.** a.p.shilin@gmail.com. Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь. С. 127.
- Шишкина Э.Л.** ilina\_dico@mail.ru. Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия. С. 91.
- Шушкевич Г.Ч.** gsys@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 39, 154.

- Шушкевич С.В.** shushkevich\_sv@grsu.by. Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь. С. 39, 154.
- Щербаков С.В.** obg-kulinar@mail.ru. Уральский государственный аграрный университет, Екатеринбург, Россия. С. 109.
- Эбель С.И.** ebelsi@susu.ru. Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия. С. 110.
- Ярмолик Л.А.** askinglop@gmail.com. Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь. С. 130.
- Akhmanova D.M.** danna.67@mail.ru. Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan. С. 63.
- Botogova M.G.** batahova@bsu.by. Belarusian State University, Minsk, Belarus. С. 116.
- Chen Y.** chenyang@smbu.edu.cn. Shenzhen MSU-BIT University, Shenzhen, China. С. 111.
- Grin A.A.** grin@grsu.by. Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus. С. 111.
- Ji P.** pengji@fudan.edu.cn. Fudan University, Shanghai, China. С. 113.
- Korzyuk V.I.** korzyuk@bsu.by. Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. С. 41, 43.
- Koshkarbaeva G.A.** gulbanukoshkarbaeva3@gmail.com. Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan. С. 45.
- Kosmakova M.T.** svetlanamir578@gmail.com. Buketov Karaganda National Research University, Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan. С. 63.
- Kozlovskaya I.S.** kozlovskaja@bsu.by. Belarusian State University, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. С. 43.
- Litvinov V.L.** vladlitvinov@rambler.ru. Samara State Technical University, Samara, Russia. С. 115.
- Litvinova K.V.** kristinalitvinova900@rambler.ru. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia. С. 115.
- Mikhasev G.I.** mikhasev@hit.edu.cn. Harbin Institute of Technology, Harbin, China. С. 116.
- Otarova J.A.** ojamanbayevna@gmail.com. Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan. С. 45.
- Panov E.Yu.** evpanov@pdmi.ras.ru. St. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia. С. 46.
- Perevaryukha A.Yu.** madelf@rambler.ru. United Directorate of Taimyr Nature Reserves, Norilsk, Russia. С. 118.
- Rudzko J.V.** janycz@yahoo.com. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus. С. 41, 43.
- Skoromnik O.V.** skoromnik@gmail.com. Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Novopolotsk, Belarus. С. 65.
- Tashpulatov S.M.** sadullatashpulatov@yandex.com. Institute of Nuclear Physics of the Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan. С. 66.
- Yuldasheva A.V.** a\_v\_yuldasheva@mail.ru. Moscow State University, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan. С. 48.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Уравнения с частными производными

|                                                                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Андрушкевич И.Е.</b> Обобщенный метод Фурье (ОМФ) в уравнении Борна-Инфельда (БИ) .....                                                                               | 3  |
| <b>Бекиев А.Б.</b> О разрешимости одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области .....                                                    | 5  |
| <b>Белько О.Н.</b> О построении первых интегралов систем с частными производными первого порядка по вещественным полиномиальным частным интегралам .....                 | 6  |
| <b>Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М.</b> Одно соотношение типа Гаусса для функции Горна $H_5$ .....                                                                           | 8  |
| <b>Гладков А.Л.</b> О существовании глобальных решений начально-краевой задачи для уравнения пористой фильтрации с поглощением и нелокальными граничными условиями ..... | 9  |
| <b>Гнездовский Ю.Ю., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф.</b> О первых интегралах якобиевых полиномиальных систем с частными производными первого порядка .....                  | 11 |
| <b>Дайняк В.В.</b> Задача типа Дирихле для некоторых дифференциальных уравнений пятого порядка .....                                                                     | 13 |
| <b>Жалукевич Д.С.</b> Групповой анализ квазилинейных уравнений второго порядка функции двух переменных .....                                                             | 15 |
| <b>Каянович С.С.</b> Трёхмерные уравнения Навье – Стокса при больших числах Рейнольдса .....                                                                             | 16 |
| <b>Корзюк В.И., Козловская И.С.</b> Классическое решение первой смешанной задачи в полуполосе для волнового уравнения .....                                              | 18 |
| <b>Корзюк В.И., Столярчук И.И.</b> Классическое решение второй смешанной задачи для уравнения типа гиперболического уравнения теплопроводности в полуполосе .....        | 19 |
| <b>Куликов А.Н., Куликов Д.А.</b> Модель Кейнса и учет пространственных факторов ... ..                                                                                  | 21 |
| <b>Маковеева П.Е.</b> Построение функционала Ляпунова по заданной расширенной производной для параболического уравнения .....                                            | 23 |
| <b>Проневич А.Ф., Белько О.Н.</b> Метод частных интегралов решения задачи Дарбу для полиномиальных систем с частными производными .....                                  | 25 |
| <b>Рогозин С.В., Дубатовская М.В.</b> О решении векторно-матричной задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения с рациональными коэффициентами .....                        | 27 |
| <b>Рузиев М.Х., Сарсенбаева Г.О.</b> Краевая задача для эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом, вырождающегося внутри области .....                        | 29 |
| <b>Старовойтов А.П., Рябченко Н.В.</b> Об асимптотике сходимости нелинейных аппроксимаций Эрмита-Чебышёва .....                                                          | 30 |
| <b>Худайкулиев Б.А.</b> Динамика уравнения теплопроводности с сингулярным граничным потенциалом типа Харди .....                                                         | 32 |
| <b>Хуштова Ф.Г.</b> Обратное преобразование Лапласа одной функции с тремя параметрами и гиперболическим тангенсом .....                                                  | 34 |
| <b>Чиб Е.С.</b> Начально-краевая задача для нестрого гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием .....                                            | 35 |
| <b>Шананин Н.А.</b> Об однозначном продолжении решений уравнений второго порядка ... ..                                                                                  | 37 |
| <b>Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В.</b> Экранирование низкочастотного магнитного поля тонким сферическим кольцом .....                                                       | 39 |
| <b>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</b> Classical solution of the Goursat problem for a semilinear nonstrictly hyperbolic biwave equation .....                                 | 41 |
| <b>Korzyuk V.I., Rudzko J.V., Kozlovskaya I.S.</b> Classical solution of the first mixed problem for a semilinear wave equation with a mixed derivative .....            | 43 |
| <b>Otarova J.A., Koshkarbaeva G.A.</b> On a boundary value problem with a conjugation condition for a parabolic equation with involution .....                           | 45 |

|                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Panov E.Yu.</b> On skew-adjointness of a vector transport operator .....                                | 46 |
| <b>Yuldasheva A.V.</b> Regularization of the solution of the Dirichlet problem for the wave equation ..... | 48 |

### Интегро-дифференциальные операторы и уравнения

|                                                                                                                                                                                                   |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Антоневич А.Б., Люксембург И.Л.</b> Алгебры операторов умножения на функции, имеющие односторонние пределы .....                                                                               | 50 |
| <b>Васильев В.Б., Клименко И.И., Сопова Т.В.</b> О представлении решения эллиптического уравнения в специальном конусе .....                                                                      | 52 |
| <b>Вувуникян Ю.М., Трифонова И.В.</b> Нелинейные интегрально-дифференциальные уравнения в полном нормированном пространстве .....                                                                 | 53 |
| <b>Матысик О.В.</b> Неявный итерационный метод решения некорректных уравнений I рода в энергетической норме гильбертова пространства .....                                                        | 55 |
| <b>Миротин А.Р., Кузьменкова Е.Ю.</b> Интегральные скошенные $\mu$ -ганкелевы операторы в пространстве Харди .....                                                                                | 57 |
| <b>Нуржанов Б.О., Нуржанова А.О.</b> Об одном применении численно-аналитического метода последовательных приближений к нелинейной краевой задаче для интегро-дифференциальных уравнений .....     | 60 |
| <b>Солиев Ю.С.</b> О применении некоторых интерполяционных полиномов к сингулярному интегрированию .....                                                                                          | 61 |
| <b>Kosmakova M.T., Akhmanova D.M.</b> Cauchy problem for a practional diffusion-wave equation with a loaded term in the form of a Riemann-Liouville derivative .....                              | 63 |
| <b>Skoromnik O.V.</b> Multi-dimensional integral transforms with the legendre function in the kernel in Lebesgue-type spaces .....                                                                | 65 |
| <b>Tashpulatov S.M.</b> Spectra of the energy operator of the one-magnon systems in the Heisenberg ferromagnet with impurity and nearest neighbor interactions and with one-ion anisotropii ..... | 66 |

### Дифференциальные уравнения и их приложения

|                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Абрашина-Жадаева Н.Г.</b> Об одном классе численных моделей для сложных задач математической физики .....                                                                                                                     | 69 |
| <b>Астахова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В.</b> О параболической задаче управления с выпуклым функционалом общего вида .....                                                                                                  | 71 |
| <b>Борухов В.Т., Заяц Г.М., Кушель О.Ю., Максимов М.С., Кратович П.С., Волчѣк В.С., Новиков П.Э., Ловшенко И.Ю., Письман Т.А.</b> Математическое моделирование обратных задач синтеза многослойных сред .....                    | 73 |
| <b>Валовик Д.В., Дюндяева А.А., Мартынова В.Ю.</b> Нелинейная двухпараметрическая задача на собственные значения и распространение двухчастотной электромагнитной волны в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой ..... | 74 |
| <b>Васьковский М.М., Зорько М.Ю.</b> Об оценке гѐльдеровской нормы решений дифференциальных уравнений, управляемых грубыми траекториями с показателем Гѐльдера, большим $1/4$ .....                                              | 76 |
| <b>Волков В.М., Дун Ц., Громыко Г.Ф., Подберезский А.В.</b> К вопросу о численном моделировании динамики жидкости в каналах переменной ширины .....                                                                              | 78 |
| <b>Гламаздин И.И., Лишик К.Я.</b> Программный комплекс для моделирования глюкозо-инсулинового взаимодействия на основе системы дифференциальных уравнений .....                                                                  | 80 |
| <b>Дымков М.П., Братковский Е.В., Дымков С.М.</b> К вопросу моделирования инвестиционной стратегии банка .....                                                                                                                   | 82 |
| <b>Лаврова О.А., Полевиков В.К.</b> Консервативная монотонная схема для уравнений конвекции-диффузии .....                                                                                                                       | 85 |

|                                                                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Лебедев А.В., Трубников Ю.В., Чернявский М.М.</b> Вычисление корней полиномов: развитие метода Бернулли – Эйлера – Лагранжа – Эйткена .....                                                                                 | 87  |
| <b>Мармыш Д.Е.</b> Применение преобразования Ханкеля при решении смешанной граничной задачи для кругового цилиндра при всестороннем сжатии .....                                                                               | 89  |
| <b>Махамуд А.А., Шишкина Э.Л.</b> Построение интегрального преобразования для оператора второго порядка с переменными коэффициентами .....                                                                                     | 91  |
| <b>Овсянников В.М.</b> Формулировка задач математической физики в конечно-разностном уравнении, минуя форму дифференциального уравнения .....                                                                                  | 92  |
| <b>Пичугина А.Н., Перцев Н.В.</b> Исследование системы дифференциальных уравнений, возникающей в модели циркуляции частиц на графе .....                                                                                       | 94  |
| <b>Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А., Чайковский М.В.</b> Многофакторные производственные функции и нейтральность научно-технического прогресса по Хиксу .....                                                                      | 96  |
| <b>Русилко Т.В.</b> О дифференциальных уравнениях, используемых при исследовании замкнутых сетей массового обслуживания в марковской среде .....                                                                               | 98  |
| <b>Статкевич С.Э.</b> О решении системы разностно-дифференциальных уравнений для открытой экспоненциальной сети массового обслуживания с входящим ММРР-потокм .....                                                            | 100 |
| <b>Сьянов Д.А.</b> Нейросетевая оптимизация редакционного документооборота на основе эргодического уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана .....                                                                                   | 101 |
| <b>Таныгина А.Н.</b> Системы линейных однородных дифференциальных уравнений и коммутативные матричные подалгебры .....                                                                                                         | 103 |
| <b>Тихов С.В., Москалева М.А., Снегур М.О.</b> Об одной двухпараметрической краевой задаче, описывающей распространение нелинейных связанных гибридных ТЕ-ТЕ волн в планарном волноводе, заполненном неоднородной средой ..... | 105 |
| <b>Цехан О.Б., Станкевич А.В., Свистун А.Ч.</b> Сравнение асимптотического и численного решения уравнения Ланжевена, возникающего при моделировании движения наночастиц в модулированном лазерном поле .....                   | 107 |
| <b>Щербаков С.В., Ким А.В.</b> Численные алгоритмы для функционально-дифференциальных уравнений на основе методологии $i$ -гладкого анализа .....                                                                              | 109 |
| <b>Эбель С.И.</b> О приближенно-аналитическом решении уравнения изгиба пластины при продольно-поперечной нагрузке .....                                                                                                        | 110 |
| <b>Chen Y., Grin A.A.</b> Equivariant neural ordinary differential equations for trajectory prediction .....                                                                                                                   | 111 |
| <b>Ji P.</b> Impact of basic network motifs on the collective response to perturbations .....                                                                                                                                  | 113 |
| <b>Litvinov V.L., Litvinova K.V.</b> Development of a mathematical model for the analysis of resonant vibrations of a string of varying length on an elastic foundation, taking into account dissipative factors .....         | 115 |
| <b>Mikhasev G.I., Botogova M.G.</b> On novel differential equation governing vibrations of nanoplates based on the two-phase integral model of nonlocal elasticity .....                                                       | 116 |
| <b>Perevaryukha A.Yu.</b> Numerical simulation of Taimyr bioresources cycles .....                                                                                                                                             | 118 |

#### Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе

|                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Березкина Л.Л., Деревяго А.Н., Егоров А.А., Рушнова И.И., Филиппова Н.К., Чехменок Т.А.</b> Об учебном пособии «Аналитическая геометрия и линейная алгебра в задачах и приложениях в 2-х частях. Часть 2» с элементами QR-кодирования ..... | 120 |
| <b>Березкина Н.С., Гринь А.А., Немец В.С.</b> О структуре учебного пособия «Дифференциальные и интегральные уравнения в тестах» и его роли в совершенствовании преподавания курса дифференциальных уравнений .....                             | 122 |
| <b>Бурачёнок И.Б., Мателенок А.П., Вакульчик В.С.</b> Совершенствование методик преподавания математических дисциплин для специалистов в области кибербезопасности .....                                                                       | 123 |
| <b>Деревяго А.Н., Кононова О.А.</b> Применение дифференциальных уравнений при решении физических задач .....                                                                                                                                   | 125 |

|                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Деревяго А.Н., Филиппова Н.К., Шилин А.П.</b> Об изучении линейных дифференциальных уравнений высших порядков .....                                                                                                                         | 127 |
| <b>Ефремов А.А.</b> О структуре блока прикладных математических дисциплин в учебных планах специальностей IT-направления .....                                                                                                                 | 129 |
| <b>Жук А.И., Защук Е.Н., Ярмолик Л.А., Шеина В.А.</b> Интерактивная визуализация окрестностей вершин в обучении теории графов .....                                                                                                            | 130 |
| <b>Зеленков В.И.</b> Серьезное решение одной несерьезной задачи .....                                                                                                                                                                          | 132 |
| <b>Козловская И.С., Чеб Е.С., Дайняк В.В., Каркоцкий А.Г.</b> Использование программных средств при построении дифференциальных моделей в курсе «Математическое моделирование» .....                                                           | 134 |
| <b>Леваков А.А., Васьковский М.М.</b> Учебное пособие «Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление векторных функций» .....                                                                                              | 136 |
| <b>Лобанова Н.И., Селютин В.Д.</b> Создание диагностических заданий для учителей математики по дифференциальным уравнениям для старшей школы .....                                                                                             | 137 |
| <b>Макарова Н.П., Проневич А.Ф.</b> Искусственный интеллект как инструмент анализа данных предметной области .....                                                                                                                             | 138 |
| <b>Марченко И.В.</b> Методические аспекты построения границ числовых множеств в курсе математического анализа .....                                                                                                                            | 140 |
| <b>Мателенок А.П., Вакульчик В.С., Бурачёнок И.Б., Завистовская Т.И.</b> Применение профессионально ориентированных задач, требующих математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений, в обучении инженеров-технологов ..... | 141 |
| <b>Мателенок А.П., Марченко И.В., Чернов С.Ю.</b> Математическое моделирование профессионально ориентированных задач для студентов химико-технологических специальностей .....                                                                 | 142 |
| <b>Мисюк В.Р.</b> Методика изучения теорем типа Джексона в пространствах аналитических функций в спецкурсе по теории приближений .....                                                                                                         | 144 |
| <b>Радыно Н.Я.</b> Математические принципы, лежащие в основе курса дифференциальных уравнений .....                                                                                                                                            | 145 |
| <b>Размыслович Г.П., Филипцов А.В.</b> О нормальном псевдорешении линейной алгебраической системы уравнений .....                                                                                                                              | 147 |
| <b>Старовойтова Е.Л.</b> Методические аспекты разноуровневого обучения математике студентов технического вуза .....                                                                                                                            | 149 |
| <b>Фролкина О.Д.</b> Пересечение кривой второго порядка с прямой: семинарское занятие ..                                                                                                                                                       | 151 |
| <b>Хыдырова А.Х.</b> Методика преподавания математики в высшей школе .....                                                                                                                                                                     | 152 |
| <b>Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В.</b> Аналитическое решение задач математической физики с использованием библиотеки SymPy .....                                                                                                                  | 154 |

Научное издание

## **ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2026**

Материалы XXII Международной научной конференции  
по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2026»

Республика Беларусь, Гродно

18–22 мая 2026 года

В двух частях

Часть 2

Издаётся в авторской редакции

Отпечатано с готового оригинал-макета

Компьютерная вёрстка: *В.М. Пецевич, Е.Е. Кулеш, Л.В. Детченя*

Техническое редактирование: *М.В. Вахмянина,*

*Я.Я. Пекарь, И.П. Зимницкая*

Подготовка обложки: *Д.О. Савко*

Подписано в печать 22.05.2026. Формат 60×84<sup>1</sup>/8.

Бумага офсетная. Ризография. Гарнитура Computer Modern.

Усл. печ. л. 19,53. Уч.-изд. л. 18,0. Тираж 75 экз. Заказ 022

Издатель и полиграфическое исполнение:

учреждение образования

«Гродненский государственный университет

имени Янки Купалы».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий

№ 1/261 от 22.02.2024.

Ул. Ожешко, д. 22, 230023, Гродно